

Министерство высшего и среднего специального образования СССР

Московское ордена Ленина, ордена Октябрьской Революции  
и ордена Трудового Красного Знамени  
высшее техническое училище им. Н. Э. Баумана

---

А. С. ГАЗАРЯН, Г. П. КЛЮЕВА

**РАСТЯЖЕНИЕ — СЖАТИЕ**

Методические указания  
по выполнению домашнего задания  
по курсу  
«Сопротивление материалов»

Данные методические указания издаются в соответствии с учебным планом. Рассмотрены и одобрены кафедрой К-5 04.04.86 г., методической комиссией факультета К 09.04.86 г. и учебно-методическим управлением 26.05.86 г.

Рецензент к.т.н. доц. Ховов В.М.

С Московское высшее техническое училище имени Н.Э.Баумана

# Оглавление

|                                                                 |    |
|-----------------------------------------------------------------|----|
| Пояска выполнения расчетно-графического домашнего задания ..... | 3  |
| Оформление расчетно-графического домашнего задания .....        | 6  |
| Растяжение-сжатие в пределах упругости .....                    | 27 |
| Растяжение-сжатие за пределами упругости .....                  | 36 |
| Приложение .....                                                |    |

Редактор О.М.Королева

Корректор Л.И.Малюткина

|            |                                 |                      |
|------------|---------------------------------|----------------------|
| Заказ 654  | Объем 2,25 п.л. (2,25 уч.-изд.) | Тираж 2000 экз.      |
| Бесплатно. | Подписано к печати 04.05.87     | Издан 1986 г., № 95. |

Типография МВТУ. 107006, Москва, Б-5, - Бауманская, 5.

## Методика выполнения расчетно-графического домашнего задания

Приступая к выполнению задания, студент должен прежде всего изучить по конспектам лекций и учебнику теоретический материал соответствующего раздела курса, затем детально разобрать примеры и задачи, решенные на лекциях и семинарах. После этого он внимательно анализирует условие домашней задачи и намечает план ее решения. Вчтаре производит исходные выкладки - строит вспомогательные, основные, эквивалентные системы, записывает необходимые для решения именно этой задачи формулы и уравнения (уравнения статического равновесия, уравнения перемещений). На данном этапе студенту следует проконсультироваться у преподавателя, чтобы исключить непроизводительные потери времени в ходе последующего расчета.

Расчеты рекомендуется вести в общем виде, производя промежуточные выкладки либо в обыкновенных дробях, либо в десятичных дробях, округляя результаты с точностью, соответствующей точности счетной линейки (относительная погрешность до 1%), и все дальнейшие вычисления вести с этой точностью. Этими же соображениями нужно руководствоваться при округлении окончательных числовых результатов расчета (размеров, допускаемых нагрузок и т.п.). В расчетах необходимо использовать рекомендуемый государственным стандартом Международную систему единиц (СИ). Основные и производные единицы этой системы, используемые в расчетах на прочность, представлены в табл. 1. Перевод из технической системы единиц в СИ выполняется в соответствии с табл. 2.

Как правило, в домашних заданиях студенту предлагается провести элементарные графические исследования полученных результатов путем построения эиер, графиков наиболее характерных функций. При этом студент, используя знания и навыки, полученные в курсе математики, должен выбрать масштаб по координатным осям, а затем по необходимому числу точек четко построить график. При выборе масштаба следует стремиться к наибольшей наглядности результатов расчета и обеспечить возможность сопоставления этих результатов. По координатным осям необходимо проставить обозначения соответствующего параметра и его размерность.

Таблица 1

| Наименование<br>величины | Единица                       |                   |                                   |
|--------------------------|-------------------------------|-------------------|-----------------------------------|
|                          | Наименование                  | Обозначения       | Размерность                       |
| Основная                 |                               |                   |                                   |
| Длина                    | метр                          | м                 | -                                 |
| Время                    | секунда                       | с                 | -                                 |
| Масса                    | килограмм                     | кг                | -                                 |
| Производная              |                               |                   |                                   |
| Скорость                 | метр в секунду                | м/с               | м/с                               |
| Ускорение                | метр на секунду<br>в квадрате | м/с <sup>2</sup>  | м/с <sup>2</sup>                  |
| Плотность                | килограмм на кубический метр  | кг/м <sup>3</sup> | кг/м <sup>3</sup>                 |
| Сила                     | ньютон                        | Н                 | кгм/с <sup>2</sup>                |
| Напряжение,<br>давление  | паскаль                       | Па                | Н/м <sup>2</sup>                  |
| Работа,<br>энергия       | джоуль                        | Дж                | Н·м                               |
| Мощность                 | ватт                          | Вт                | кг·м <sup>2</sup> /с <sup>3</sup> |
| Момент сил               | ньютон-метр                   | Н·м               | Н·м                               |

Таблица 2

| Наименование<br>величины | Техническая<br>система | СИ                                                        |
|--------------------------|------------------------|-----------------------------------------------------------|
| Длина                    | 1 см                   | 10 <sup>-2</sup> м                                        |
| Площадь                  | 1 см <sup>2</sup>      | 10 <sup>-4</sup> м <sup>2</sup>                           |
| Сила                     | 1 кг                   | 10 Н (9,81)                                               |
| Напряжение, давление     | 1 кг/см <sup>2</sup>   | 10 <sup>5</sup> Н/м <sup>2</sup> (0,981·10 <sup>5</sup> ) |
| Работа, энергия          | 1 кг·см                | 0,1 Дж (0,0981)                                           |
| Мощность                 | 1 кг·см/с              | 0,1 Вт (0,0981)                                           |
| Момент сил               | 1 кг·см                | 0,1 Н·м (0,0981)                                          |

Любой расчет теряет смысл, если в ходе его допускаются ошибки в выкладках. Поэтому следует, с одной стороны, внимательно и ответственно выполнять все математические операции, включая элементарные, а с другой стороны, использовать возможность проверить результат счета. Пренебрежение "арифметикой" со стороны инженера недопустимо ни в малейшей степени.

Вычислительная техника, необходимая для расчетов по курсу "Сопротивление материалов", несложная - электронные калькуляторы различных типов, малая электронно-вычислительная техника, счетные линейки.

Чистовое оформление выполненного задания производится без согласования с преподавателем в тех случаях, если студент уверен в правильности расчета.

### Оформление расчетно-графического домашнего задания

Задание оформляется в тетради в клетку (как правило, в 12 листов). Сохранив обложку, на первом (титальном) листе следует вычертить рамку и сделать справа внизу основную надпись (штамп) по указанному в приложении образцу.

При оформлении задач используются только лицевые стороны всех последующих листов, т.е. правые страницы заполняются, а левые остаются чистыми.

Оформление задачи надо начинать с полного текста условия, включая все числовые данные, и чертежа заданной системы в выбранном масштабе. Никаких дополнительных построений, связанных с решением задачи, на этом чертеже быть не должно. Словные факторы можно изображать не в масштабе.

Последующее оформление ведется в соответствии с планом решения конкретной задачи. Целесообразно все чертежи выполнять карандашом, а записи вести чернилами (пастой, или также карандашом, соблюдая четкость и аккуратность, не допуская помяток и исправлений.

В задаче, условие которой требует выполнения нескольких пунктов, при оформлении решения следует указывать порядковый номер и наименование пункта по условию.

Необходимо помнить, что построение эпюр следует вести после определения реакций в опорах, переходя от заданной системы к вспомогательной. Надо избегать такого размещения материала, при котором часть эпюр оказывается на одной странице, а часть пере-

носятся на следующую. Это затрудняет в дальнейшем анализ построенных эпюр.

Все выкладки должны представлять собой стройную логическую цепочку и сопровождаться лаконичным пояснительным текстом.

При переходе от выражений, записанных в общем виде, к числовым результатам следует сначала полностью осуществить подстановку всех заданных параметров, не производя даже элементарных выкладок, а затем рациональным образом упростить полученное после подстановки выражение и вычислить искомое значение.

Если в задаче помимо построения эпюр предусмотрена также графическая интерпретация результатов (зависимости перемещений от сил и т.п.), то рекомендуется использовать миллиметровую бумагу форматом, не превышающим тетрадный лист.

При условии строгого соблюдения всех правил построения разрешается строить графики непосредственно в задании на листе в клетку.

#### Расхождение-сжатие в пределах упругости

##### Задача I

Для стального ступенчатого стержня ( $F$  и  $2F$  — площади ступеней) длиной  $4l$ , нагруженного системой сил, показанных на рис. I, построить эпюры нормальных сил  $N$ , нормальных напряжений  $\sigma$  и осевых перемещений  $w$ .

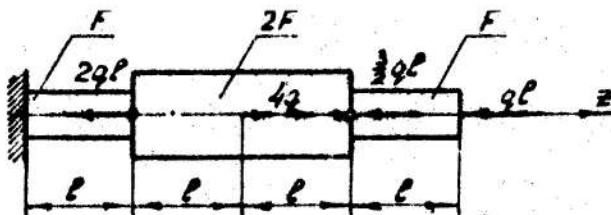


Рис. I

# Решение

## I. Определение реакции опоры

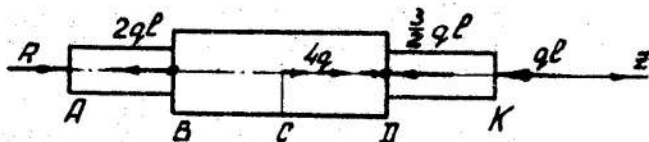


Рис. 2

Уравнение равновесия для всего стержня (рис. 2):

$$\sum P_z = 0.$$

$$R - 2ql + 4q - \frac{3}{2}ql - ql = 0.$$

$$R = \frac{1}{2}ql.$$

Задача статически определима.

Для задач данного типа статическая определимость может быть установлена иначе: достаточно, определяя внутренние силы методом сечений, рассматривать равновесие правой незакрепленной части стержня.

## 2. Определение нормальных сил

Используя метод сечений, рассмотрим (см. рис. 2) последовательно все четыре участка стержня: AB, BC, CD, DK (равновесие всех частей стержня, записывая сумму проекций всех сил на ось z).

Рассмотрим текущее сечение в пределах участка AB, показав искомую силу  $N_{AB}$  направленной на растяжение (рис. 3). Тогда знак силы, полученный из решения уравнения равновесия  $\sum P_z = 0$ , автоматически укажет знак нормальной силы в этом сечении: растяжение - плюс, сжатие - минус.

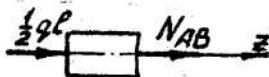


Рис. 3

$$\sum P_z = \frac{1}{2}ql + N_{AB} = 0,$$

где  $N_{AB} = -\frac{1}{2}ql$  - сила сжимающая, постоянна по длине участка AB.

Для текущего сечения участка BC (рис. 4) имеем

$$\Sigma P_z = \frac{1}{2}ql - 2ql + N_{BC} = 0,$$

где  $N_{BC} = \frac{3}{2}ql$  — сила растягивающая, постоянна по длине участка  $BC$ .

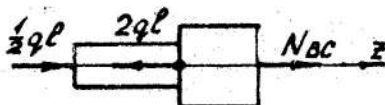


Рис. 4

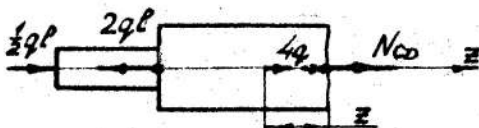


Рис. 5

Для текущего сечения участка  $CD$  (рис. 5)

$$\Sigma P_z = \frac{1}{2}ql - 2ql + 4ql + N_{CD} = 0,$$

$$N_{CD} = \frac{3}{2}ql - 4ql.$$

В пределах этого участка нормальная сила  $N_{CD}$  оказалась переменной, линейно зависящей от  $z$ , что объясняется наличием на участке  $CD$  равномерно распределенной по его длине нагрузки.

При  $z=0$   $N_C = \frac{3}{2}ql$  — растяжение;

при  $z=l$   $N_D = -\frac{5}{2}ql$  — сжатие.

Для текущего сечения участка  $DK$  (рис. 6)

$$\Sigma P_z = \frac{1}{2}ql - 2ql + 4ql - \frac{3}{2}ql + N_{DK} = 0,$$

$$N_{DK} = -ql \text{ — сжатие.}$$

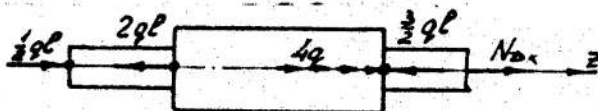


Рис. 6

Заметим, что к этому же результату придем, рассмотрев в соответствии с методом сечений равновесие части стержня, расположенной справа от текущего сечения (рис. 7).

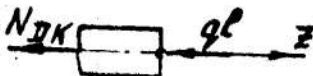


Рис. 7

$$\sum P_z = -N_{DK} - q\ell = 0$$

$$N_{DK} = -q\ell - \text{сжатие.}$$

### 3. Определение напряжений

Напряжение

$$\sigma = \frac{N}{F},$$

(I)

где  $N$  - нормальная сила в данном сечении;

$F$  - площадь этого сечения.

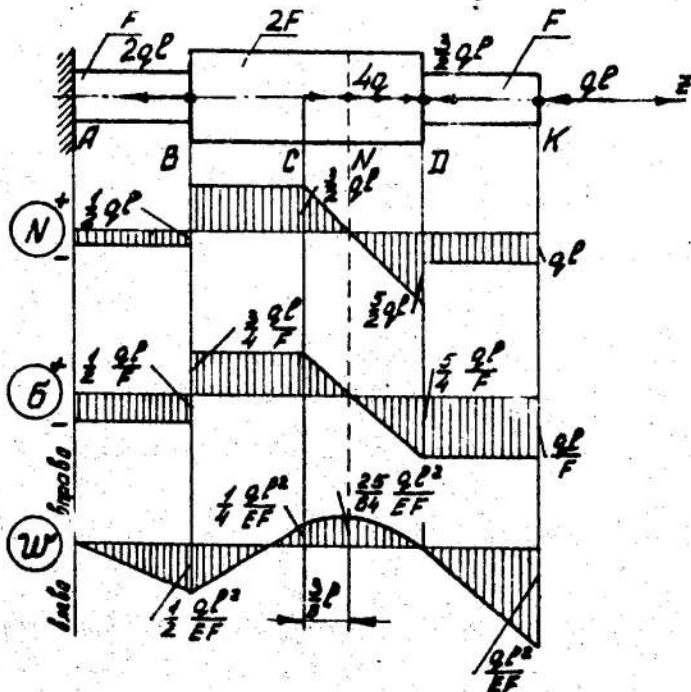


Рис. 8

Знак напряжения определяется знаком нормальной силы на рассматриваемом участке

$$\sigma_{AB} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{Q\ell}{F} - \text{сжатие};$$

$$\sigma_{BC} = \frac{3}{4} \cdot \frac{Q\ell}{F} - \text{растяжение};$$

$$\sigma_{CD} = \frac{3}{4} \cdot \frac{Q\ell}{F} - \frac{2Qz}{F};$$

при  $z=0$   $\sigma_c = \frac{3}{4} \cdot \frac{Q\ell}{F} - \text{растяжение};$

при  $z=\ell$   $\sigma_D = -\frac{5}{4} \cdot \frac{Q\ell}{F} - \text{сжатие};$

$$\sigma_{DK} = -\frac{Q\ell}{F} - \text{сжатие}.$$

Эпюры нормальных сил  $N$  и нормальных напряжений  $\sigma$  представлены на рис. 8.

#### 4. Определение осевых перемещений

При определении продольных перемещений  $W$  при отсутствии температурных деформаций используется формула

$$\frac{dW}{dz} = \epsilon,$$

из которой с учетом закона Гука  $\sigma = E\epsilon$  и формулы  $\sigma = \frac{N}{F}$  следует:

$$W = C + \int \frac{N}{EF} dz, \quad (2)$$

где  $W$  — перемещение текущего сечения  $z$  по длине стержня;

$N$  — нормальная сила в этом сечении.

Если в качестве начала отсчета принять закрепленное сечение, то постоянная  $C$  становится равной нулю.

В случае, когда стержень не имеет закрепленного сечения, вычисление перемещений может проводиться от любого мысленно закрепленного сечения.

За положительное направление осевого перемещения может быть принято любое из направлений продольной оси стержня (вправо или влево).

Для данной задачи примем за начало отсчета сечение  $A$  ( $W_A = 0$ ), а положительное направление отсчета перемещений совместим с направлением оси  $z$ .

На участке  $AB$  ( $0 \leq z \leq \ell$ ) нормальная сила  $N_{AB}$  постоянна, следовательно, эпюра  $W$  в соответствии с формулой (2) линейна.

При  $z=0$   $W = W_A = 0$ ;

при  $z=l$   $W=W_B = \frac{N_{AB} \cdot l}{EF} = -\frac{1}{2} \frac{ql^2}{EF}$ ;

(учитывается, что  $N_{AB}$  на этом участке сжимающая, поэтому сечение  $B$  перемещается влево).

На участке  $BC$  ( $0 \leq z \leq l$ ) нормальная сила  $N_{BC}$  также постоянна, а, следовательно, эпюра  $W$  также линейна. Перемещение сечения  $B$  уже известно, поэтому

$$W_C = W_B + \frac{N_{BC} l}{E \cdot 2F} = -\frac{1}{2} \frac{ql^2}{EF} + \frac{(\frac{3}{2} ql) \cdot l}{E \cdot 2F} = \frac{1}{4} \frac{ql^2}{EF}$$

На участке  $CD$  ( $0 \leq z \leq l$ ) нормальная сила  $N_{CD}$  меняется по линейному закону, а интеграл (2)

$$W = W_C + \int_0^l \frac{(\frac{3}{2} ql - 4qz)}{E \cdot 2F} dz = \frac{1}{4} \frac{ql^2}{EF} + \frac{3}{4} \frac{ql^2}{EF} - \frac{ql^2}{EF}$$

по квадратичному.

На этом участке  $W$  достигает экстремума в сечении, где производная

$$\frac{dW}{dz} = 0, \quad \text{т.е. } \frac{3}{4} ql - 2qz = 0;$$

откуда  $z_{\text{экстр}} = \frac{3}{8} l$ .

Для построения эпюры  $W$  на этом участке вычислим:

$$W|_{z=0} = W_C = \frac{1}{4} \frac{ql^2}{EF}$$

сечение перемещается вправо;

$$W|_{z=\frac{3}{8}l} = W_N = \frac{1}{4} \frac{ql^2}{EF} + \frac{3}{4} \frac{ql}{EF} \cdot \frac{3}{8} l - \frac{q}{EF} \left(\frac{3}{8} l\right)^2 = \frac{25}{64} \frac{ql^2}{EF}$$

сечение перемещается вправо;

$$W|_{z=l} = W_D = \frac{1}{4} \frac{ql^2}{EF} + \frac{3}{4} \frac{ql}{EF} l - \frac{q}{EF} l^2 = 0.$$

На участке  $DK$  перемещение меняется по линейному закону, причем в сечении  $K$

$$W_K = W_D + \frac{N_{DK} l}{EF} = 0 - \frac{ql \cdot l}{EF} = -\frac{ql^2}{EF}$$

сечение перемещается влево.

Эпюра перемещений приведена на рис. 8.

Рассмотрим другой способ вычисления перемещений, переписав формулу (2) следующим образом:

$$W = \frac{1}{E} \int_0^l 6dz. \quad (3)$$

Интеграл в этом выражении можно рассматривать как площадь эпюры  $6$  между закрепленным сечением (константа  $C=0$ ) и данным.

На участке  $AB$  ( $0 \leq z \leq l$ )  $6_{AB} = \frac{9l}{2F}$  постоянно, а, следовательно, эпюра  $W$  в соответствии с интегралом (3) линейна.

При  $z=0$   $W=W_A=0$ ;

при  $z=l$   $W=W_B = \frac{1}{E} 6_{AB} \cdot l = -\frac{1}{2} \frac{9l^2}{EF}$

$6_{AB}$  на участке сжимающее, сечение перемещается влево.

Двигаясь таким образом последовательно от сечения к сечению вдоль оси стержня, определим перемещения, вычисляя графически интеграл (3) алгебраическим суммированием площадей эпюры напряжений:

$$W_C = W_B + \frac{1}{E} 6_{BC} \cdot l = -\frac{1}{2} \frac{9l^2}{EF} + \frac{1}{E} \frac{3}{4} \cdot \frac{9l}{F} l = -\frac{1}{4} \frac{9l^2}{EF}$$

и т.д.

## Задача 2

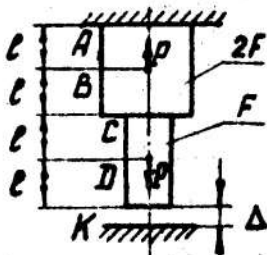


Рис. 9

Стальной ступенчатый стержень жестко закреплен в опоре  $A$  и имеет зазор  $\Delta$  в сечении  $K$  (рис. 9). Построить эпюры внутренних сил  $N$ , нормальных напряжений  $\sigma$ , осевых перемещений  $W$ . Из расчета на прочность определить площадь поперечного сечения  $F$ .

Дано:  $P = 50$  кН,  $l = 0,3$  м,

$$\Delta = \frac{1}{2} \frac{Pl}{EF}, \quad 6_{пр} = 6_{кж} = 6_T = 250 \text{ МПа},$$

$$n_T = 1,5, \quad E = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа}.$$

## Решение

I. Проверим, перекроется ли зазор  $\Delta$  при действии сил  $P$ , вычислив удлинение стержня в предположении отсутствия нижней опоры. Используя принцип независимости действия внешних сил, по-

лучим

$$\Delta \varepsilon_{AK} = \frac{\rho \ell}{EF} + \frac{\rho \cdot 2\ell}{E \cdot 2F} - \frac{\rho \cdot \ell}{E \cdot 2F} = \frac{3}{2} \frac{\rho \ell}{EF},$$

$\Delta \varepsilon_{AK} > \Delta$  следовательно, зазор перекроется, т.е. в сечении К возникнет сжимающая реакция  $R_K$ .

2. Запишем уравнение статического равновесия

$$\sum P_i = 0, \quad R_A - \rho + \rho - R_K = 0, \quad R_A = R_K \quad (I)$$

Задача один раз статически неопределима.

Уравнение перемещений:

$$\Delta \varepsilon_{AK} = \Delta$$

Запишем его, представив нижнее сечение К свободным и нагруженным силой  $R_K$ , а верхнее сечение А закрепленным (рис. 10), в виде

$$\begin{aligned} \frac{\rho \ell}{EF} + \frac{\rho \cdot 2\ell}{E \cdot 2F} - \frac{\rho \cdot \ell}{E \cdot 2F} - \frac{R_K \cdot 2\ell}{EF} - \\ - \frac{R_K \cdot 2\ell}{E \cdot 2F} = \Delta = \frac{1}{2} \frac{\rho \ell}{EF} \end{aligned} \quad (2)$$

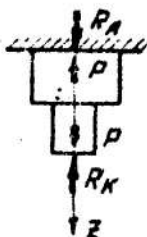


Рис. 10

При записи уравнения (2) необходимо следить за знаками слагаемых. Со знаком плюс в левой части уравнения берутся те перемещения, которые способствуют закрытию зазора  $\Delta$ .

Решив уравнение (2) с учетом (I), получим

$$R_K = R_A = \frac{1}{3} \rho.$$

3. Построим эпюры нормальных сил  $N$ , нормальных напряжений  $\sigma$  и осевых перемещений  $w$

$$N_{AB} = R_A = \frac{1}{3} \rho = 16,66 \text{ кН} \quad - \text{сжатие};$$

$$N_{BC} = N_{CD} = \rho - R_A = 33,33 \text{ кН} \quad - \text{растяжение};$$

$$N_{DK} = R_K = \frac{1}{3} \rho = 16,66 \text{ кН} \quad - \text{сжатие}.$$

Нормальные напряжения

$$\sigma_{AB} = \frac{N_{AB}}{2F} = \frac{\rho}{6F} \quad - \text{сжатие};$$

$$\sigma_{BC} = \frac{N_{BC}}{2F} = \frac{0}{3F} - \text{растяжение};$$

$$\sigma_{CD} = \frac{N_{CD}}{F} = \frac{2}{3} \frac{P}{F} - \text{растяжение};$$

$$\sigma_{DE} = \frac{N_{DE}}{F} = \frac{1}{3} \frac{P}{F} - \text{сжатие}.$$

4. Вычислим осевые перемещения.

За начало отсчета выбираем сечение А, перемещения, направленные вниз, положительны.

$$W_A = 0; \\ W_B = \frac{N_{AB} \cdot l}{2EF} = \frac{-P \cdot l}{3 \cdot 2F} = - \frac{P \cdot l}{6EF} - \text{вверх};$$

$$W_C = W_B + \frac{N_{BC} \cdot l}{2EF} = - \frac{Pl}{6EF} + \frac{2}{3} \frac{Pl}{2EF} = \frac{1}{6} \frac{Pl}{EF} - \text{вниз};$$

$$W_D = W_C + \frac{N_{CD} \cdot l}{EF} = \frac{Pl}{6EF} + \frac{2}{3} \frac{Pl}{EF} = \frac{5}{6} \frac{Pl}{EF} - \text{вниз};$$

$$W_E = W_D + \frac{N_{DE} \cdot l}{EF} = \frac{5}{6} \frac{Pl}{EF} - \frac{Pl}{3EF} = \frac{1}{2} \frac{Pl}{EF} - \text{вниз}.$$

5. Определим площадь поперечного сечения из условия прочности. Условие прочности:

$$\sigma_{\max} \leq [\sigma] \quad (3)$$

Так как материал пластичный, то  $[\sigma] = \frac{\sigma_T}{n_T}$ .

Из уравнения (3) с учетом эшоры  $\sigma$

$$\frac{2}{3} \frac{P}{F} = \frac{\sigma_T}{n_T}; \quad F = \frac{2}{3} \frac{P \cdot n_T}{\sigma_T};$$

$$F = \frac{2 \cdot 50 \cdot 10^3 \cdot 1.5}{3 \cdot 250 \cdot 10^6} = 2 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2;$$

$$F = 2 \text{ см}^2.$$

Вычислим  $\sigma$  и  $W$  с учетом найденного значения  $F$ .

$$\sigma_{AB} = \frac{P}{6F} = \frac{50 \cdot 10^3}{6 \cdot 2 \cdot 10^{-4}} = 41,66 \text{ МПа};$$

$$\sigma_{BC} = \frac{P}{3F} = \frac{50 \cdot 10^3}{3 \cdot 2 \cdot 10^{-4}} = 83,33 \text{ МПа};$$

$$\sigma_{CD} = \frac{2}{3} \frac{P}{F} = \frac{2 \cdot 50 \cdot 10^3}{3 \cdot 2 \cdot 10^{-4}} = 166,66 \text{ МПа};$$

$$\sigma_{DE} = \frac{1}{3} \frac{P}{F} = 83,33 \text{ МПа}.$$

Осевые перемещения:

$$W_B = -\frac{P \rho}{6 E F} = -\frac{50 \cdot 10^3 \cdot 0,3}{6 \cdot 2 \cdot 10^{11} \cdot 2 \cdot 10^{-4}} = -0,0625 \text{ мм} - \text{вверх};$$

$$W_C = 0,0625 \text{ мм} - \text{вниз};$$

$$W_D = \frac{5}{6} \frac{P \rho}{E F} = 0,3125 \text{ мм} - \text{вниз};$$

$$W_K = \frac{1}{2} \frac{P \rho}{E F} = 0,1875 \text{ мм} - \text{вниз}.$$

Все полученные результаты представлены на рис. II.

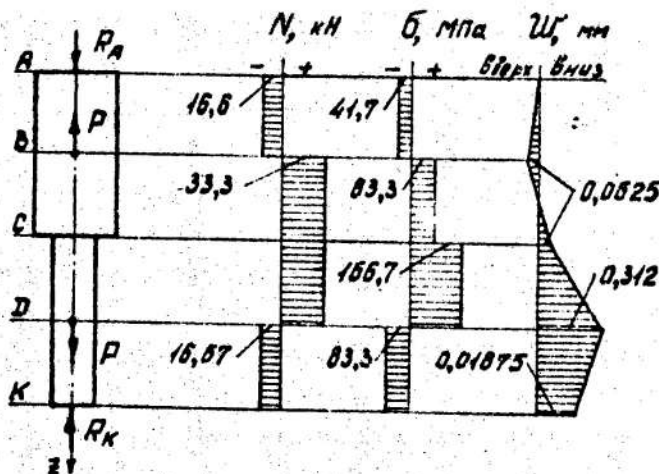


Рис. II

### Задача 3

Определить внутренние силы и перемещения, возникающие в стальных стержнях одинаковых размеров в результате сборки заданной стержневой системы (рис. I2).

Вычислить допускаемую величину зазора  $\Delta$  из условия прочности стержней.

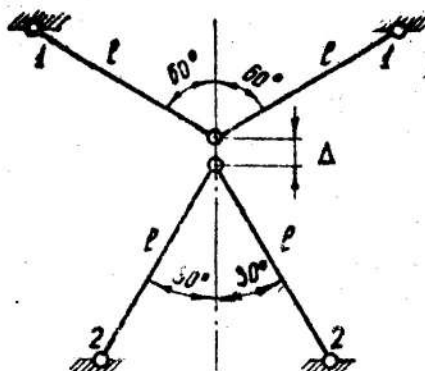


Рис. 12

Дано:  $l = 1 \text{ м}$ ,  $F = 2 \text{ см}$ ,  $E = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа}$ ,  $\mu_T = 1,5$ ,  
 $\sigma_{\text{тр}} = \sigma_{\text{сж}} = \sigma_T = 300 \text{ МПа}$ .

### Решение

I. Определение нормальных сил и напряжений, возникших в стержнях.

В результате сборки данной стержневой системы узлы 1 и 2 соединятся в общий узел А, который займет промежуточное положение между узлами 1 и 2 (рис. 13).

Из условия статического равновесия узла А, записав  $\sum Q_y = 0$ , получим

$$2N_1 \cos 60^\circ = 2N_2 \cos 30^\circ; \quad N_1 = \sqrt{3} N_2. \quad (1)$$

Задача один раз статически неопределима.

Уравнение перемещений получим из условия совместности деформаций стержней 1 и 2 (см. рис. 13):

$$\Delta = \frac{\Delta l_1}{\cos 60^\circ} = \frac{\Delta l_2}{\cos 30^\circ}; \quad (2)$$

$$\Delta l_1 = \frac{N_1 l}{EF}, \quad \Delta l_2 = \frac{N_2 l}{EF};$$

$$\Delta = \frac{N_1 l}{EF \cos 60^\circ} = \frac{N_2 l}{EF \cos 30^\circ}. \quad (3)$$

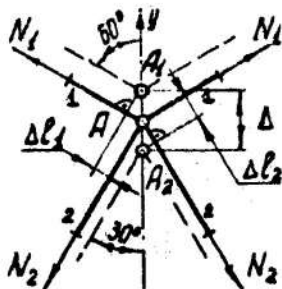


Рис. 13

Решив совместно уравнения (1) и (3), определим внутренние силы и напряжения в стержнях I и 2:

$$N_1 = \frac{3}{8} \frac{\Delta E F}{\ell} \quad \text{-- растяжение;}$$

$$N_2 = \frac{\sqrt{3}}{8} \frac{\Delta E F}{\ell} \quad \text{-- растяжение;}$$

$$\sigma_1 = \frac{3}{8} \frac{\Delta E}{\ell} \quad \text{-- растяжение;}$$

$$\sigma_2 = \frac{\sqrt{3}}{8} \frac{\Delta E}{\ell} \quad \text{-- растяжение.}$$

Из условия прочности

$$\sigma_{\max} \leq [\sigma] = \frac{\sigma_T}{n_T}$$

вычислим допускаемую величину зазора  $[\Delta]$ :

$$\frac{3}{8} \frac{[\Delta] \cdot E}{\ell} = \frac{\sigma_T}{n_T}; \quad [\Delta] = \frac{8}{3} \frac{\sigma_T \ell}{n_T E};$$

$$[\Delta] = \frac{8 \cdot 300 \cdot 1}{3 \cdot 1,5 \cdot 2 \cdot 10^5} = \frac{8}{3} \cdot 10^{-3} \text{ м} = \frac{8}{3} \text{ мм};$$

$$[\Delta] = 2,67 \text{ мм.}$$

При найденном значении зазора  $\Delta$

$$N_1 = \frac{3}{8} \frac{\Delta E F}{\ell} = \frac{3 \cdot 8 \cdot 10^{-3} \cdot 2 \cdot 10^{11} \cdot 2 \cdot 10^4}{8 \cdot 3 \cdot 1} = 4 \cdot 10^4 \text{ Н};$$

$$N_1 = 40 \text{ кН};$$

$$N_2 = \frac{1}{\sqrt{3}} N_1; \quad N_2 = 22,7 \text{ кН};$$

$$\sigma_1 = 200 \text{ МПа}; \quad \sigma_2 = 114 \text{ МПа.}$$

Задача 4

Определить внутренние силы, возникающие в стержнях I и 2 (рис. 14). Найти коэффициент запаса системы по текучести  $n_T$  и работу  $A$  с  $\rho$ . Деформацией пружины большой жесткости и силами веса всех элементов системы по сравнению с силой  $P$  пренебречь.

Дано:  $P = 49 \text{ кН}$ ,  $F_1 = F_2 = 2 \text{ см}^2$ ,  $\ell_2 = 1 \text{ м}$ ,  $\ell_1 = 3\ell_2$ ,  $E = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа}$ ,  $\sigma_T = 300 \text{ МПа}$ .

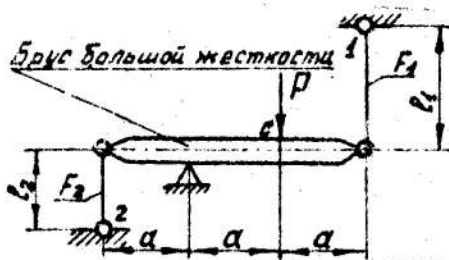


Рис. 14



Рис. 15

### Решение

#### I. Определение нормальных сил и нормальных напряжений

Для нахождения нормальных сил используем метод сечений и запишем уравнение статического равновесия:

$$\sum M_0 = 0, N_1 \cdot 2a + N_2 \cdot a - P \cdot a = 0, \quad 2N_1 + N_2 = P \quad (1)$$

Задача один раз статически неопределима.

Представив положение оси бруса после деформации стержней I и 2 (рис. 15), запишем уравнение перемещений:

$$\delta l_1 = 2 \cdot \delta l_2, \quad (2)$$

$$\delta l_1 = \frac{N_1 l_1}{EF_1}, \quad \delta l_2 = \frac{N_2 l_2}{EF_2}$$

При  $F_1 = F_2 = F$  и  $l_1 = 3l_2$  получим

$$\frac{N_1 \cdot 3l_2}{EF} = 2 \cdot \frac{N_2 l_2}{EF} \rightarrow N_1 = \frac{2}{3} N_2 \quad (3)$$

Решив совместно уравнения (1) и (3), получим

$$N_1 = \frac{2}{7} \rho - \text{растяжение}; \quad N_2 = \frac{3}{7} \rho - \text{растяжение};$$

$$N_1 = 14 \text{ кН}; \quad N_2 = 21 \text{ кН};$$

$$\sigma_1 = \frac{N_1}{F} = \frac{14 \cdot 10^3}{2 \cdot 10^{-4}} = 70 \text{ МПа} - \text{растяжение};$$

$$\sigma_2 = \frac{N_2}{F} = \frac{21 \cdot 10^3}{2 \cdot 10^{-4}} = 105 \text{ МПа} - \text{растяжение}.$$

2. Определение коэффициента запаса системы по текучести  
Коэффициент запаса  $n_T$  получим из условия прочности при растяжении-сжатии.

$$\sigma_{max} \leq [\sigma] = \frac{\sigma_T}{n_T} \rightarrow n_T = \frac{\sigma_T}{\sigma_{max}};$$

$$\sigma_{max} = \sigma_2;$$

$$n_T = \frac{\sigma_T}{\sigma_2} = \frac{300}{105} = 2,8; \quad n_T = 2,8.$$

3. Определение работы силы  $P$

$$A = \frac{1}{2} P \cdot \delta_c;$$

$$\delta_c = \Delta l_2 = \frac{N_2 L}{EF} = \frac{21 \cdot 10^3 \cdot 1}{2 \cdot 10^{11} \cdot 2 \cdot 10^{-4}} = 5,25 \cdot 10^{-4} \text{ м};$$

$$\delta_c = 0,525 \text{ мм};$$

$$A = \frac{1}{2} \cdot 49 \cdot 10^3 \cdot 5,25 \cdot 10^{-4};$$

$$A = 12,85 \text{ Дж}.$$

Растяжение-сжатие за пределами упругости

#### Задача 5

Брус большой жесткости закреплен стальными стержнями заданных размеров и нагружен силой  $P$  (по. 16).

Считая материал стержней идеально упругопластическим (рис. 17), определить силу  $P = P_T$ , при которой в системе возникнут первые пластические деформации, и силу  $P = P_{до}$ , при которой исчерпывается несущая способность системы. Деформациями бруса большой жесткости и силой веса всех элементов системы по сравнению с силой  $P$  пренебречь.

Вычислить остаточные силы в стержнях 1, 2 ... 3 и остаточное перемещение точки  $A$  приложения силы  $P$  после нагружения системы силой  $P = P_{до}$  и последующей разгрузки. Построить графики измене-

ние внутренних сил в стержнях 1, 2 и 3 и перемещения точки В при возрастании силы  $P$  от нуля до  $P_{np}$ .

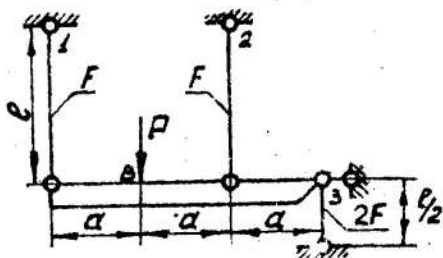


Рис. 16

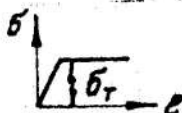


Рис. 17

Дано:  $l = 0,5$  м;  $F = 1$  см<sup>2</sup>;  $P^* = 65$  кН;  $E = 2 \cdot 10^5$  МПа;  
 $\sigma_{TP} = \sigma_{Tсж} = 350$  МПа.

### Решение

I. Рассмотрим систему в области упругих деформаций ( $0 < P \leq P_T$ ). Уравнения статического равновесия (рис. 18):

$$\sum P_y = 0; N_1 + N_2 + N_3 - P = 0; \sum M_A = 0; \quad (I)$$

$$N_2 \cdot 2a - P \cdot a + N_3 \cdot 3a = 0; \quad 2N_2 + 3N_3 = P. \quad (Ia)$$

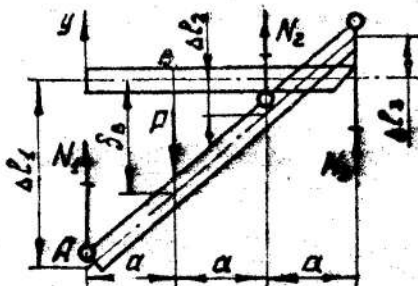


Рис. 18

Уравнение перемещений получим, представив систему в деформированном состоянии (см. рис. 18):

$$\begin{aligned} \Delta \ell_1 + \Delta \ell_3 &= 3(\Delta \ell_2 + \Delta \ell_3), \\ 3 \cdot \Delta \ell_2 + 2 \cdot \Delta \ell_3 - \Delta \ell_1 &= 0. \end{aligned} \quad (2)$$

Для стержней 1 и 2 выбранные направления сил  $N_1$  и  $N_2$  соответствуют деформированному состоянию стержней (см. рис. 18), следовательно

$$\Delta \ell_1 = \frac{N_1 \ell}{EF} \quad \text{и} \quad \Delta \ell_2 = \frac{N_2 \ell}{EF}.$$

Сила  $N_3$  при записи уравнений равновесия (I) и (Ia) предполагалась сжимающей, а по рисунку деформированного состояния (см. рис. 18) стержень 3 увеличил свою длину, поэтому  $\Delta \ell_3$ , записанное через силу  $N_3$ , будет отрицательным, т.е.

$$\Delta \ell_3 = - \frac{N_3 \cdot \ell / 2}{EF}.$$

После подстановки в уравнение (2) получим

$$3 \cdot \frac{N_2 \ell}{EF} - 2 \cdot \frac{N_3 \ell / 2}{EF} - \frac{N_1 \ell}{EF} = 0,$$

$$5N_2 - N_3 - 2N_1 = 0. \quad (3)$$

Решив совместно уравнения (I), (Ia), (3), получим

$$N_1 = \frac{13}{22} P - \text{растяжение}; \quad (4)$$

$$N_2 = \frac{5}{22} P - \text{растяжение}; \quad (5)$$

$$N_3 = \frac{4}{22} P - \text{сжатие}. \quad (6)$$

Нормальные напряжения  $\sigma = \frac{N}{F}$ ;

$$\sigma_1 = \frac{13}{22} \frac{P}{F}; \quad \sigma_2 = \frac{5}{22} \frac{P}{F}; \quad \sigma_3 = \frac{2}{22} \frac{P}{F}; \quad \sigma_4 = \sigma_{\max}$$

Первые пластические деформации появятся при достижении  $\sigma_{\max}$  величин  $\sigma_T$ , т.е. при  $\sigma_1 = \sigma_T$ , следовательно, из этого условия может быть найдена сила  $P_T$ :

$$\frac{13}{22} \frac{P_T}{F} = \sigma_T \quad \rightarrow \quad P_T = \frac{22}{13} \sigma_T \cdot F;$$

$$P_T = \frac{22}{13} 350 \cdot 10^6 \cdot 1 \cdot 10^{-4} = 59200 \text{ Н}; \quad P_T = 59,2 \text{ кН}.$$

Внутренние силы при  $P = P_T = 34,2 \text{ кН}$

$$N_1 = 6_T \cdot F = 350 \cdot 10^6 \cdot 10^{-4} = 35 \text{ кН} \quad - \text{растяжение};$$

$$N_2 = \frac{2}{22} \cdot P_T \cdot F = \frac{5}{22} \cdot 54,2 = 13,45 \text{ кН} \quad - \text{растяжение};$$

$$N_3 = \frac{4}{25} \cdot P_T = \frac{4}{22} \cdot 54,2 = 10,76 \text{ кН} \quad - \text{сжатие}.$$

2. Определим перемещение точки B

В соответствии с чертежом деформированного состояния (см.

рис. 18)

$$\delta_B + \Delta \ell_3 = 2(\Delta \ell_2 + \Delta \ell_3);$$

$$\delta_B = 2\Delta \ell_2 + \Delta \ell_3$$

С учетом уравнений (5) и (6)

$$\delta_B = 2 \cdot \frac{5}{22} \cdot \frac{P \ell}{EF} - \frac{4}{22} \cdot \frac{P \ell / 2}{E \cdot 2F} = \frac{9}{22} \cdot \frac{P \ell}{EF} \quad (7)$$

При  $P = P_T$ :

$$\delta_B = \frac{9}{22} \cdot \frac{54,2 \cdot 10^3 \cdot 0,5}{2 \cdot 10^{11} \cdot 10^{-4}} = 6,05 \cdot 10^{-4} \text{ м} = 0,605 \text{ мм} \quad - \text{вниз}.$$

Рассмотрим систему в области упругопластических деформаций

( $P_T \leq P \leq P_{\text{по}}$ ).

Так как  $P > P_T$ , то стержень I деформируется пластически, следовательно, с учетом диаграммы б-Е (см. рис. 1б)

$$b_1 = b_T, \quad (8)$$

$$N_1 = b_T \cdot F.$$

Стержни 2 и 3 деформируются упруго.

Из уравнения статики

$$N_1 + N_2 + N_3 - P = 0, \quad (9)$$

$$N_2 \cdot 2a + N_3 \cdot 3a - P \cdot a = 0. \quad (10)$$

Решая совместно уравнения (8), (9) и (10), находим внутренние силы (рис. 19):

$$N_2 = 2P - 3b_T \cdot F, \quad (11)$$

$$N_3 = 2b_T \cdot F - P. \quad (12)$$

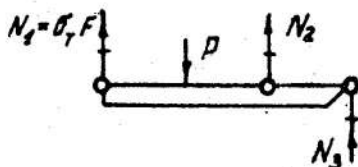


Рис. 19

Нормальные напряжения

$$\sigma_2 = \frac{2P}{F} - \sigma_T; \quad \sigma_3 = \sigma_T - \frac{P}{2F}.$$

Перемещение точки В следует определять через изменения длин упруго работающих стержней 2 и 3:

$$\delta_B = 2 \cdot \Delta l_2 + \Delta l_3 = 2 \cdot \frac{(2P - \sigma_T F) l}{EF} - \frac{(\sigma_T F - P) l}{E \cdot 2F},$$

$$\delta_B = \frac{(17P - 26 \cdot \sigma_T \cdot F) l}{4EF}. \quad (13)$$

Предельное состояние системы наступает тогда, когда, наряду со стержнем I, пластические деформации появятся в стержне 2 или 3, так как при этих условиях будет исчерпана несущая способность системы. Предположим, что пластические деформации, наряду со стержнем I, возникли в стержне 2:

$$\sigma_2 = \frac{2P'}{F} - \sigma_T = \sigma_T \rightarrow P' = 2\sigma_T F.$$

Теперь предположим, что пластические деформации, наряду со стержнем I, возникли в стержне 3:

$$\sigma_3 = \sigma_T - \frac{P''}{2F} = -\sigma_T \rightarrow P'' = 4\sigma_T F;$$

$$P' < P'';$$

следовательно, вслед за стержнем I пластические деформации возникнут в стержне 2, т.е.

$$P_{np} = P' = 2\sigma_T F;$$

$$P_{np} = 2 \cdot 350 \cdot 10^6 \cdot 10^{-4}; \quad P_{np} = 70 \text{ кН.}$$

При  $P = P_{np} = 70 \text{ кН.}$

$$N_1 = 6_T \cdot F = 35 \text{ кН} - \text{растяжение};$$

$$N_2 = 6_T \cdot F = 35 \text{ кН} - \text{растяжение};$$

$$N_3 = 26_T \cdot F - P_{np} = 0 - \text{сжатие}.$$

С учетом уравнения (I3) при  $P = P_{np} = 26_T F$

$$\delta_B = \frac{(17 \cdot 26_T F - 26 \cdot 6_T F) l}{4EF} = \frac{26_T l}{E} = \frac{2 \cdot 350 \cdot 10^6 \cdot 0,5}{2 \cdot 10^{11}};$$

$$\delta_B = 1,75 - \text{вниз}.$$

Рассмотрим нагружение системы силой  $P^* = 65 \text{ кН}$  и последующую разгрузку. Так как  $P_T < P^* < P_{np}$  внутренние силы и перемещения точки В при нагрузке системы силой  $P^*$  определяются по формулам (8), (II), (I2) и (I3):

$$N_1^N = 6_T F = 35 \text{ кН} - \text{растяжение};$$

$$N_2^N = 2P^* \cdot 36_T F = 2 \cdot 65 \cdot 3 \cdot 35 = 25 \text{ кН} - \text{растяжение};$$

$$N_3^N = 26_T F - P^* = 2 \cdot 35 - 65 = 5 \text{ кН} - \text{сжатие};$$

$$\delta_B^N = \frac{(17 \cdot 1^* - 26 \cdot 6_T F) l}{4EF} = \frac{(17 \cdot 65 - 26 \cdot 35) 10^3 \cdot 0,5}{4 \cdot 2 \cdot 10^{11} \cdot 10^{-4}};$$

$$\delta_B^N = 1,219 - \text{вниз}.$$

Равновесие системы при нагрузке представлено на рис. 20.

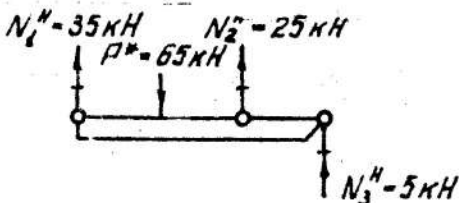


Рис. 20

Внутренние силы и перемещения точки В при разгрузке определяются в соответствии с зависимостями (4)–(7), полученными в упругом решении (см. п. I), с учетом изменения направления действия силы  $P^*$  на противоположное.

$$N_1^P = \frac{13}{22} P^* = \frac{13 \cdot 65}{22} = 38,41 \text{ кН} - \text{сжатие};$$

$$N_2^p = \frac{5}{22} \rho^* = \frac{5 \cdot 65}{22} = 14,77 \text{ кН}$$

- сжатие;

$$N_3^p = \frac{4}{22} \rho^* = \frac{4 \cdot 65}{22} = 11,82 \text{ кН}$$

- растяжение.

Равновесие системы при разгрузке представлено на рис. 21.

$$\delta_B = \frac{9}{22} \frac{\rho^2}{EF} = \frac{9 \cdot 65 \cdot 10^3 \cdot 0,5}{22 \cdot 2 \cdot 10^{11} \cdot 10^{-4}} = 0,665 \text{ мм} - \text{вверх.}$$

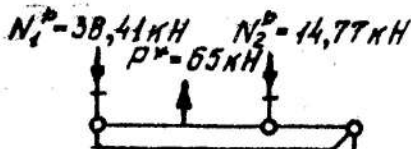


Рис. 21

Остаточные усилия в стержнях 1, 2 и 3 и перемещение точки найдем алгебраически, суммируя соответствующие результаты, полученные при нагрузке и разгрузке

$$N_i^{\text{ост}} = N_i^H - N_i^p; \quad \delta_B^{\text{ост}} = \delta_B^H + \delta_B^p;$$

$$N_1^{\text{ост}} = 35 - 38,41 = -3,41 \text{ кН}$$

- сжатие;

$$N_2^{\text{ост}} = 25 - 14,77 = 10,23 \text{ кН}$$

- растяжение;

$$N_3^{\text{ост}} = -5 + 11,82 = 6,82 \text{ кН}$$

- растяжение;

$$\delta_B^{\text{ост}} = 1,219 - 0,665 = 0,554 \text{ мм.}$$

Здесь  $N$  имеет знак плюс при растяжении;  $\delta_B$  имеет знак плюс при перемещении точки  $B$  вниз.

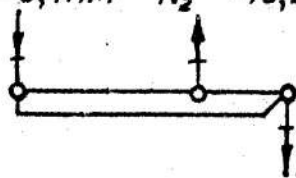
Равновесие системы под действием остаточных сил представлено на рис. 22.

Уравнения равновесия под действием остаточных сил:

$$N_1^{\text{ост}} + N_3^{\text{ост}} - N_2^{\text{ост}} = 0$$

$$3,41 + 6,82 - 10,23 = 0.$$

$$N_1^{ост} = 3,41 \text{ кН} \quad N_2^{ост} = 10,23 \text{ кН}$$



$$N_3^{ост} = 6,82 \text{ кН}$$

Рис. 22

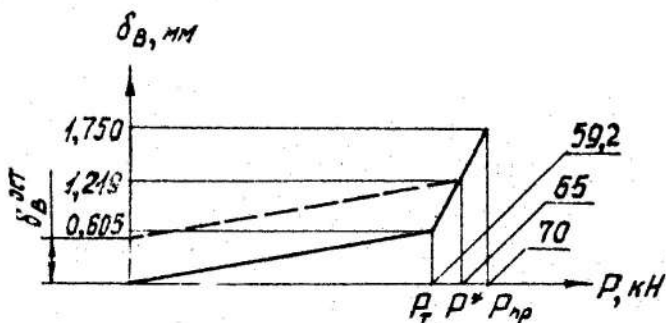
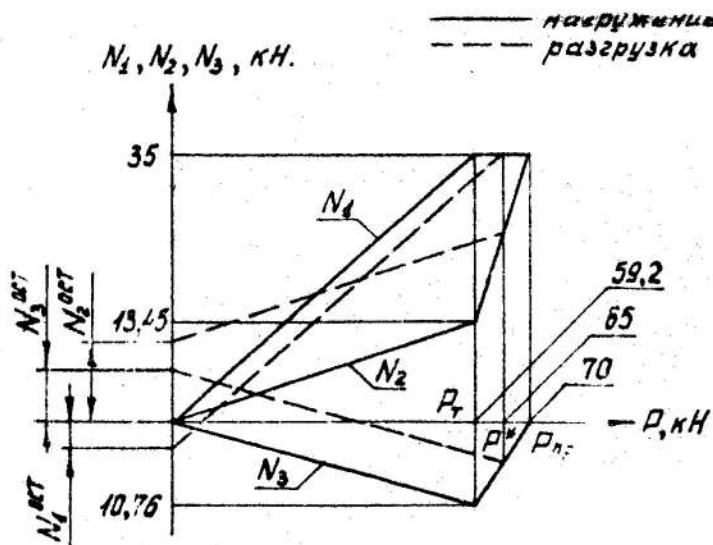


Рис. 23

Графики зависимостей внутренних сил  $N_i$  и перемещения  $\delta_B$  от величины силы  $P$  представлены на рис. 23. Убедимся, что  $N_i^{ост}$  и  $\delta_B^{ост}$ , полученные графически, совпали с соответствующими результатами аналитического решения.

### Задача 6

Стержень поперечного сечения  $F$  и жестко соединенная с ним втулка поперечного сечения  $2F$  нагружены силами  $P$  (рис. 24).

Построить эпюры нормальных сил, напряжений и перемещений, возникающих в элементах системы при упругих деформациях.

Определить остаточные силы в стержне и во втулке, возникающие после нагружения системы силами  $P = P^*$  и последующей разгрузки.

Построить графики изменения внутренних сил и перемещений сечения  $B$  при возрастании силы  $P$  от нуля до предельного значения  $P_{пр}$ .

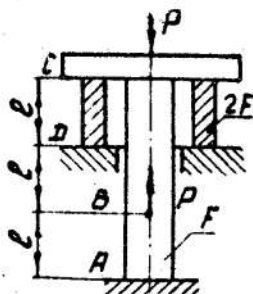


Рис. 24

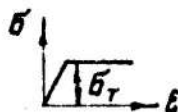


Рис. 25

Стержень и втулка изготовлены из одного и того же идеально-упругопластического материала (см. диаграмму " $\sigma$ - $\epsilon$ ", рис. 25).

Дано:  $l = 0,3$  м;  $F = 2,5$  см<sup>2</sup>;  $\sigma_{пр} = \sigma_{тсх} = 300$  МПа;  
 $E = 2 \cdot 10^5$  МПа;  $P^* = \frac{15}{8} \sigma_T \cdot F$ .

## Р е ш е н и е

I. Рассмотрим систему в области упругих деформаций ( $0 \leq P \leq P_T$ ).  $P_T$  - внешняя сила, при которой в системе появляются первые пластические деформации, т.е.  $\epsilon_{max}$  достигает величины  $\epsilon_T$ .

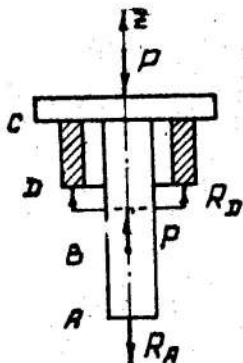


Рис. 26

Для определения  $\epsilon_{max}$  необходимо вычислить внутренние силы  $N_i$  по всем участкам системы.

Отбросив опоры и заменив их реакциями, определим последние, рассмотрим равновесие полученной вспомогательной системы (рис. 26).

Уравнение статического равновесия:

$$\begin{aligned} -R_A + P + R_D - P &= 0, \\ R_A &= R_D. \end{aligned} \quad (I)$$

При двух неизвестных  $R_A$  и  $R_D$  и одном уравнении статического равновесия степень статической неопределимости данной системы равна единице.

Для раскрытия статической неопределимости необходимо одно дополнительное уравнение - уравнение совместности деформаций или уравнение перемещений, которое можно получить, приравняв уменьшение длины втулки и стержня:

$$\begin{aligned} \Delta \ell_{dm} &= \Delta \ell_{cm}; \\ \frac{P_D \cdot \ell}{E \cdot 2F} &= \frac{P \cdot 2\ell}{EF} - \frac{R_A \cdot 3\ell}{EF}. \end{aligned} \quad (2)$$

При вычлениии  $\Delta \ell_{cm}$  использован принцип независимости действия сил: считая сечение C стержня неподвижным (условно закрепленным), к стержню последовательно прикладывались силы  $P$  и  $R_A$ .

Решив совместно уравнения (I) и (2), получим

$$R_A = R_D = \frac{4}{7}P.$$

# Внутренние силы

$$N_{AB} = R_A, \quad N_{AB} = \frac{4}{7} P \quad - \text{растяжение};$$

$$N_{BC} = P - R_A, \quad N_{BC} = \frac{3}{7} P \quad - \text{сжатие};$$

$$N_{CD} = R_D, \quad N_{CD} = \frac{4}{7} P \quad - \text{сжатие}.$$

## Нормальные напряжения

$$\sigma_{AB} = \frac{N_{AB}}{F} = \frac{4}{7} \frac{P}{F} \quad - \text{растяжение};$$

$$\sigma_{BC} = \frac{N_{BC}}{F} = \frac{3}{7} \frac{P}{F} \quad - \text{сжатие};$$

$$\sigma_{CD} = \frac{N_{CD}}{F} = \frac{2}{7} \frac{P}{F} \quad - \text{сжатие}.$$

При возрастании силы  $P$  пластические деформации возникнут в первую очередь на наиболее нагруженном участке  $AB$ . Из условия

$\sigma_{AB} = \sigma_T$  можно найти соответствующее значение силы

$$P = P_T : \frac{4}{7} \frac{P_T}{F} \cdot \sigma_T \rightarrow P_T = \frac{7}{4} \sigma_T F;$$

$$P_T = \frac{7}{4} \cdot 300 \cdot 10^6 \cdot 25 \cdot 10^{-4} = 1,312 \cdot 10^5 \text{ Н} = 131,2 \text{ кН}.$$

Осевые перемещения определим, приняв за начало отсчетов для стержня и втулки соответственно сечения  $A$  и  $D$ . При этом перемещения, совпадающие с направлением оси  $Z$ , т.е. направленные вверх, считаем положительными.

Перемещения для стержня:

$$W_A = 0$$

$$W_B = \Delta l_{AB} = \frac{N_{AB} \cdot l}{EF} = \frac{4}{7} \frac{Pl}{EF} \quad - \text{вверх};$$

$$W_C = W_B + \Delta l_{BC} = \frac{4}{7} \frac{Pl}{EF} + \frac{N_{BC} \cdot 2l}{EF};$$

$$W_C = \frac{4}{7} \frac{Pl}{EF} - \frac{3}{7} \frac{Pl \cdot 2}{EF} = - \frac{2}{7} \frac{Pl}{EF} \quad - \text{вниз}.$$

Перемещения для втулки:

$$W_C = \Delta l_{CD} = \frac{N_{CD} \cdot l}{E \cdot 2F} = - \frac{4}{7} \frac{Pl}{E \cdot 2F} = - \frac{2}{7} \frac{Pl}{EF} \quad - \text{вниз}.$$

Эпюры  $N$ ,  $\sigma$  и  $W$  построены отдельно для стержня и втулки (рис. 27).

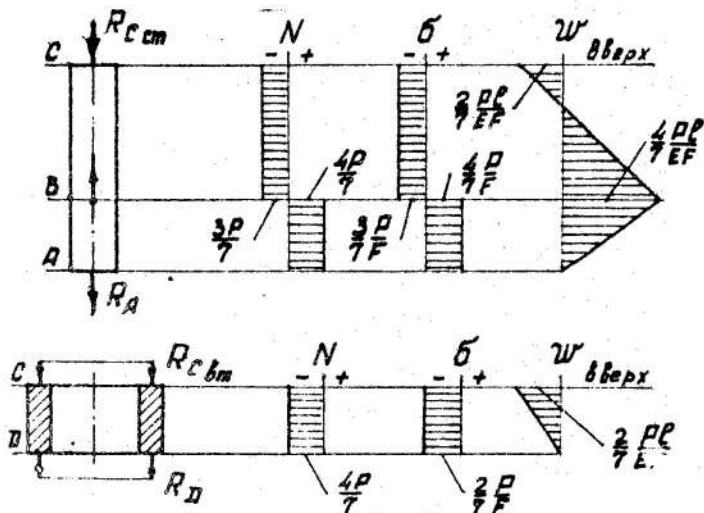


Рис. 27

$$\text{При } \rho = \rho_T \quad N_{AB} = N_{CD} = \frac{4}{7} \cdot \frac{7}{4} 6_T F = 6_T F;$$

$$N_{AB} = 300 \cdot 10^6 \cdot 2,5 \cdot 10^{-4} = 75 \text{ кН};$$

$$N_{BC} = \frac{3}{7} \cdot \frac{7}{4} 6_T F = \frac{3}{4} 6_T F = 56,25 \text{ кН};$$

$$W_B = \frac{4}{7} \cdot \frac{7}{4} \frac{6_T F \rho}{EF} = \frac{6_T \rho}{E} = \frac{300 \cdot 10^6 \cdot 0,3}{2 \cdot 10^{11}} = 0,45 \text{ мм}.$$

2. Рассмотрим систему в области упругопластических деформаций ( $\rho_T \leq \rho \leq \rho_{np}$ ).  $\rho_{np}$  — внешняя сила, при которой заданная система "стержень-вилка" теряет свою несущую способность, т.е. дальнейшее увеличение внешней силы становится невозможным.

Особо подчеркнем, что при значениях нагрузки  $\rho > \rho_T$  результаты упругого решения, полученные выше в п. I, перестают быть достоверными, т.е. использоваться они не могут.

Так как диаграмма "б-ε" (см. рис. 25) указывает на отсутствие упрочнения материала, то при  $\rho_T \leq \rho \leq \rho_{np}$  на наиболее на-

груженном участке  $AB$   $\sigma_{AB} = \sigma_T = \text{const}$ ,

а, следовательно,  $N_{AB} = \sigma_T F$ .

Из условия статического равновесия части стержня, выделенной текущими сечениями на участке  $AB$  и  $BC$  (рис. 28), получим

$$N_{BC} = \rho \cdot N_{AB} = \rho \cdot \sigma_T F; \text{ а } \sigma_{BC} = \frac{\rho}{F} \cdot \sigma_T F.$$

Из условия равновесия всей системы (рис. 26) имеем уравнение (I)

$$R_A = R_D; \text{ но } R_A = N_{AB}; R_D = N_{CD},$$

следовательно,  $N_{CD} = N_{AB} = \sigma_T F$ ; а  $\sigma_{CD} = \frac{\sigma_T}{2}$ .

Итак, напряжения  $\sigma$  на участках  $AB$  и  $CD$  не зависят от  $\rho$ , следовательно, при  $\rho > \rho_T$  эти участки не сопротивляются росту силы  $\rho$ . Росту внешней нагрузки  $\rho$  продолжает сопротивляться только участок  $BC$  (см. уравнение для  $\sigma_{BC}$ ), тогда очевидно, что с ростом нагрузки  $\rho$ , волею за участком  $AB$ , пластические деформации появятся на участке  $BC$ , т.е.  $\sigma_{BC} = \sigma_T$ , а  $N_{BC} = \sigma_T F$  и для системы наступит предельное состояние ( $\rho = \rho_{np}$ ). Предельная сила  $\rho_{np}$  может быть найдена из условия равновесия части стержня (рис. 29)

$$\rho_{np} \cdot F + \sigma_T F = 2\sigma_T F$$

или из условия, что в предельном состоянии  $\sigma_{BC} = \sigma_T$ , т.е.

$$\frac{\rho_{np}}{F} - \sigma_T = \sigma_T, \text{ откуда } \rho_{np} = 2\sigma_T F;$$

$$\rho_{np} = 2 \cdot 300 \cdot 10^6 \cdot 2,5 \cdot 10^{-4};$$

$$\rho_{np} = 150 \text{ кН}.$$

Осовое перемещение сечения  $B$  при значениях  $\rho_T \leq \rho \leq \rho_{np}$  следует искать, рассматривая перемещения сечений тех участков системы, которые работают упруго, т.е. участков  $BC$  и  $CD$ .

По-прежнему из условия совместности деформаций имеем  $\Delta \ell_{Bm} = \Delta \ell_{cm}$  или  $\Delta \ell_{CD} = \Delta \ell_{AB} + \Delta \ell_{BC}$ .

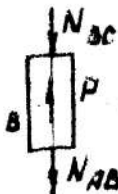


Рис. 28

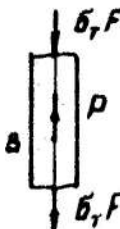


Рис. 29

откуда

$$\Delta l_{AB} = W_B = \Delta l_{BC} - \Delta l_{CD}; \quad W = \frac{N_{BC} l}{EF} - \frac{N_{CD} l}{2EF}.$$

С учетом значений  $N_{BC} = \rho \cdot 6_T F$  и  $N_{CD} = 6_T F$  получим

$$W_B = \frac{2(\rho \cdot 6_T F) l}{EF} - \frac{6_T l}{2E}.$$

При  $\rho = \rho_{np} = 26_T F$

$$N_{AB} = 6_T F = 300 \cdot 10^6 \cdot 2,5 \cdot 10^{-4} = 75 \text{ кН};$$

$$N_{BC} = \rho_{np} \cdot 6_T F = 26_T F - 6_T F = 75 \text{ кН};$$

$$N_{CD} = 6_T F = 75 \text{ кН};$$

$$W_B = \frac{2(\rho_{np} \cdot 6_T F) l}{EF} - \frac{6_T l}{2E} = \frac{3}{2} \frac{6_T l}{E};$$

$$W_B = \frac{3}{2} \cdot \frac{300 \cdot 10^6 \cdot 0,3}{2 \cdot 10^{11}} = 0,675 \cdot 10^{-3} \text{ м} = 0,675 \text{ мм}.$$

Определим остаточные силы  $N_i^{ост}$  и остаточное перемещение сечения В  $W_B^{ост}$  при нагружении системы силой  $\rho = \frac{15}{8} 6_T F$  и полной последующей разгрузке.

Так как  $\rho_T < \rho^* < \rho_{np}$ , то при нагружении, используем решение, полученное в п. 2 (равновесие элементов системы стержень - втулка при нагрузке представлено на рис. 30), запишем

$$N_{AB}^H = 6_T F = 75 \text{ кН} - \text{растяжение};$$

$$N_{BC}^H = \rho^* \cdot 6_T F = \frac{15}{8} 6_T F - 6_T F = \frac{7}{8} 6_T F = 63,75 \text{ кН} - \text{сжатие};$$

$$N_{CD}^H = N_{AB}^H = 6_T F = 75 \text{ кН} - \text{сжатие}.$$

Перемещения при нагрузке:

$$W_B^H = \frac{2(\rho^* \cdot 6_T F) l}{EF} - \frac{6_T l}{2E}; \quad W_B^H = \frac{5}{4} \frac{6_T l}{E};$$

$$W_B^H = \frac{5 \cdot 300 \cdot 10^6 \cdot 0,3}{4 \cdot 2 \cdot 10^{11}};$$

$$W_B^H = 0,562 \cdot 10^{-3} \text{ м} = 0,562 \text{ мм} - \text{вверх}.$$

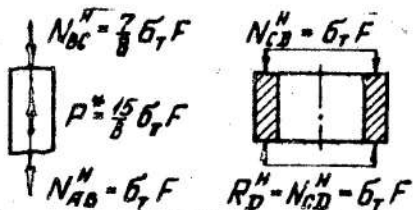


Рис. 30

Полную разгрузку заданной системы произведем, приложив силы  $P = P^*$  в направлениях, противоположных заданным.

Так как при разгрузке справедлив закон Гука, то при определении  $N_i^P$  и  $w_B^P$  можно использовать упругое решение (см. п. I). Так как разгрузка — это нагружение теми же силами  $P^*$ , но противоположно направленными, знаки внутренних сил при разгрузке будут противоположными по сравнению со знаками при нагрузке.

$$N_{AB}^P = \frac{4}{P} P^* = \frac{4}{7} \cdot \frac{15}{8} 6_T F = \frac{15}{14} 6_T F = 80,36 \text{ кН} - \text{сжатие};$$

$$N_{BC}^P = \frac{3}{7} P^* = \frac{3}{7} \cdot \frac{15}{8} 6_T F = \frac{45}{56} 6_T F = 60,27 \text{ кН} - \text{растяжение};$$

$$N_{CD}^P = \frac{4}{7} P^* = 80,36 \text{ кН} - \text{растяжение}.$$

Равновесие элементов системы при разгрузке представлено на рис. 31.

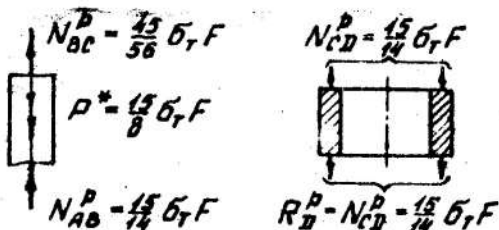


Рис. 31

Остаточные силы  $N_i^{\text{ост}}$  и перемещение  $w_B^{\text{ост}}$  определяем, суммируя соответствующие результаты, полученные при нагрузке и разгрузке:

$$N_i^{ост} = N_i^H + N_i^D; \quad W_B^{ост} = W_B^H + W_B^D;$$

$$N_{AB}^{ост} = 6_T F - \frac{15}{14} 6_T F = -\frac{1}{14} 6_T F = -5,36 \text{ кН} \quad - \text{сжатие};$$

$$N_{CD}^{ост} = -\frac{7}{8} 6_T F + \frac{45}{56} 6_T F = -\frac{1}{14} 6_T F = -5,36 \text{ кН} \quad - \text{сжатие};$$

$$N_{ED}^{ост} = -6_T F + \frac{15}{14} 6_T F = \frac{1}{14} 6_T F = 5,36 \text{ кН} \quad - \text{растяжение}.$$

Равновесие элементов системы под действием остаточных сил представлено на рис. 32.

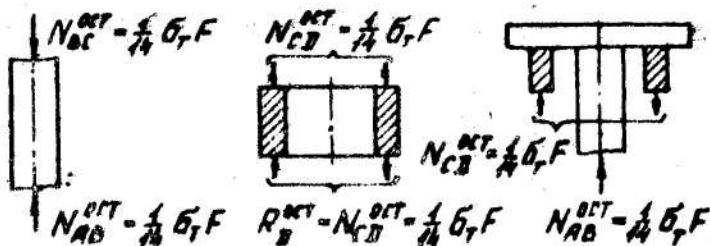


Рис. 32

Графики зависимостей внутренних сил  $N_i$  и перемещения  $W_B$  от величины силы  $D$  представлены на рис. 33.

Заметим, что по построенным графикам можно графически определить  $N_i^{ост}$  и  $W_B^{ост}$  и сопоставить полученные величины с результатом аналитического решения (они должны быть одинаковы).

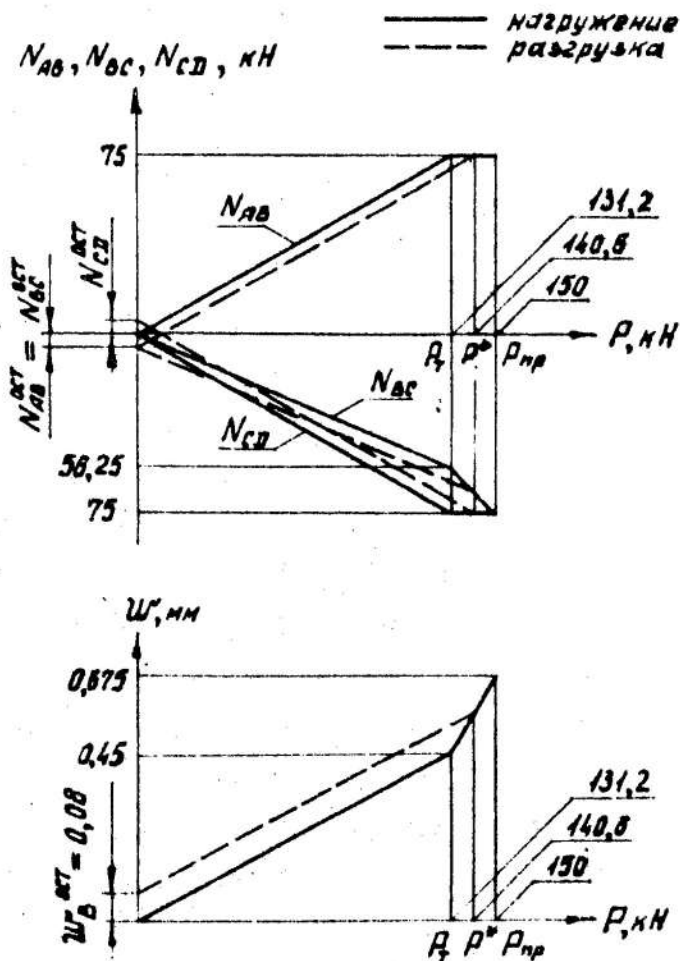


Рис. 33

### Образец письма

Technical drawing of a rectangular card with dimensions and labels. The card is divided into several sections. The top section is labeled "Фамилия, инициалы преподавателя" (Surname, initials of the teacher) and has a width of 120. Below this, the card is divided into four columns with widths of 25, 25, 15, and 15. The first column is labeled "Факультет" (Faculty), the second "Группа" (Group), the third "Часть курса" (Part of the course), and the fourth "Номер задания" (Task number). The main body of the card is labeled "МВТУ Сопротивление материалов" (MVTU Strength of Materials) and has a height of 40. Below this, there is a section labeled "Вариант" (Variant) with a width of 60. The bottom section is labeled "Фамилия, инициалы исполнителя" (Surname, initials of the performer) and has a height of 10. The card is also labeled "Номер задания" (Task number) and "Номер варианта" (Variant number).