

Бесплатно

Осипов

Министерство высшего и среднего специального образования СССР

Московское ордена Ленина, ордена Октябрьской Революции
и ордена Трудового Красного Знамени
высшее техническое училище имени Н. Э. Баумана

И. Д. КИСЕНКО, В. И. ФОМИН

Утверждены редсоветом МВТУ

РАСЧЕТ СЖАТЫХ СТЕРЖНЕЙ НА УСТОЙЧИВОСТЬ

Методические указания по курсу
«Сопротивление материалов»
для студентов вечернего факультета

Под редакцией Н. А. Суховой

Москва

1987

Данные методические указания издаются в соответствии с учебным планом.

Рассмотрены и одобрены кафедрой К-5 12.12.86 г. методической комиссией факультета К 18.12.86 г. и учебно-методическим управлением 04.01.87 г.

Рецензент д. т. н. проф. Стасенко И. В.

© Московское высшее техническое училище им. Н. Э. Баумана

Оглавление

Обозначения	1
Основные зависимости	1
Примеры расчетов стержней на устойчивость	3
Энергетический метод определения коэффициента приведенной длины	8
Расчетно-графическое задание № 6 «Расчет сжатого стержня»	11

Обозначения

P	- сосредоточенная сила, Н;
$P_{кр}$	- критическое значение силы, Н;
σ	- нормальное напряжение, Па;
$\sigma_{кр}$	- критическое напряжение, Па;
$\sigma_{лп}$	- предел пропорциональности, Па;
$\sigma_{тс}$	- предел текучести при сжатии, Па;
$\sigma_{ср}$	- предел прочности при сжатии, Па;
$[\sigma]$	- допускаемое напряжение при сжатии, Па;
ψ	- коэффициент снижения допускаемого напряжения;
γ_y	- коэффициент запаса устойчивости;
E	- модуль упругости первого рода, Па;
L	- длина, м;
F	- площадь поперечного сечения, м ² ;
I	- наименьший осевой момент инерции сечения, м ⁴ ;
i	- наименьший радиус инерции сечения, м;
K	- коэффициент формы сечения;
μ	- коэффициент приведения длины;
λ	- гибкость стержня;
N	- продольная (нормальная) сила, Н;
Q	- поперечная сила, Н;
M	- изгибающий момент, Н·м;
θ	- угловое перемещение, рад;
V	- линейное перемещение, м;

Основные зависимости

Гибкость стержня $\lambda = \frac{\mu L}{i}$, где $i = \sqrt{\frac{I}{F}}$.

Критическая сила $P_{кр} = \frac{\pi^2 EI}{(\mu L)^2}$.

Критическое напряжение $\sigma_{кр} = \frac{P_{кр}}{F} = \frac{E \pi^2}{\lambda^2}$.

Формулы для $P_{кр}$ и $\sigma_{кр}$ применимы только при упругих деформациях, т.е. при $\lambda \gg \lambda_{лп}$, где $\lambda_{лп} = \pi \sqrt{\frac{E}{\sigma_{лп}}}$ - предельная гибкость стержня, при которой $\sigma_{кр} = \sigma_{лп}$. При $\lambda < \lambda_{лп}$ критическое напряжение $\sigma_{кр} = \sigma_{тс} - (\sigma_{тс} - \sigma_{лп}) \left(\frac{\lambda}{\lambda_{лп}} \right)^2$; для хрупкого материала следует в этой формуле заменить $\sigma_{тс}$ на $\sigma_{ср}$. Условие устойчивости $\frac{P}{F} \leq \psi [\sigma]$. Умножением обеих частей равенства на λ^2 условие устойчивости приводится к виду

$$\frac{\lambda^2}{\psi} \leq \frac{E \pi^2}{[\sigma]} \cdot K, \quad \text{где } K = \frac{F}{I}.$$

Редактор Н. Г. Ковалевская. Корректор Л. И. Малиютина

Заказ 688 Объем 0,75 п. л. (0,75 уч.-изд. л.) Тираж 300 экз.

Бесплатно Подп. в печать 12.05.87 г. План 1987 г., № 81.

Типография МВТУ, 107005, Москва, Б-5, 2-я Бауманская, 5.

Критическая сила может быть вычислена энергетическим методом:

$$\frac{\partial U}{\partial \Delta} = \frac{\partial}{\partial \Delta} \int_0^L \frac{1}{2} E I \left(\frac{v''}{\Delta} \right)^2 dz$$

где $\frac{1}{2} \int_0^L E I \left(\frac{v''}{\Delta} \right)^2 dz$ - потенциальная энергия деформации изгиба стержня, $\Delta = \int_0^L \frac{1}{2} E I \left(\frac{v''}{\Delta} \right)^2 dz$ - осевое перемещение силы P (рис. 1), определяемое формой оси стержня между сечением, в котором приложена сила, и неподвижной опорой; $v = f(z)$ - предварительно выбранная функция, соответствующая форме оси стержня.

В табл. 1 даны коэффициенты приведения длин, в табл. 2 - коэффициенты снижения допускаемого напряжения при сжатии.

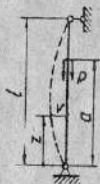


Рис. 1

Таблица 1

$\mu = 2,0$	$\mu = 1,0$	$\mu = 0,7$	$\mu = 0,5$	$\mu = 1$	$\mu = 2$	$\mu = 2$

Таблица 2

Значения коэффициента φ

Сталь (Ст. 2, Ст. 3, Ст. 4)			Сталь (Ст. 5)		
λ	φ	λ^2 / φ	λ	φ	λ^2 / φ
1	2	3	4	5	6
10	0,99	$0,101 \cdot 10^3$	10	0,98	$0,102 \cdot 10^3$
20	0,96	$0,417 \cdot 10^3$	20	0,95	$0,421 \cdot 10^3$
30	0,94	$0,957 \cdot 10^3$	30	0,92	$0,978 \cdot 10^3$
40	0,92	$0,174 \cdot 10^4$	40	0,89	$0,180 \cdot 10^4$
50	0,89	$0,281 \cdot 10^4$	50	0,86	$0,291 \cdot 10^4$
60	0,86	$0,410 \cdot 10^4$	60	0,82	$0,439 \cdot 10^4$
70	0,81	$0,605 \cdot 10^4$	70	0,76	$0,645 \cdot 10^4$
80	0,75	$0,853 \cdot 10^4$	80	0,70	$0,914 \cdot 10^4$
90	0,69	$0,117 \cdot 10^5$	90	0,62	$0,131 \cdot 10^5$
100	0,60	$0,167 \cdot 10^5$	100	0,51	$0,196 \cdot 10^5$
110	0,52	$0,233 \cdot 10^5$	110	0,43	$0,281 \cdot 10^5$

Окончание табл. 2

1	2	3	4	5	6
120	0,45	$0,320 \cdot 10^5$	120	0,36	$0,400 \cdot 10^5$
130	0,40	$0,423 \cdot 10^5$	130	0,33	$0,512 \cdot 10^5$
140	0,36	$0,544 \cdot 10^5$	140	0,29	$0,675 \cdot 10^5$
150	0,32	$0,703 \cdot 10^5$	150	0,26	$0,865 \cdot 10^5$
160	0,29	$0,883 \cdot 10^5$	160	0,24	$0,107 \cdot 10^6$
170	0,26	$0,111 \cdot 10^6$	170	0,21	$0,138 \cdot 10^6$
180	0,23	$0,141 \cdot 10^6$	180	0,19	$0,171 \cdot 10^6$
190	0,21	$0,172 \cdot 10^6$	190	0,17	$0,212 \cdot 10^6$
200	0,19	$0,211 \cdot 10^6$	200	0,15	$0,267 \cdot 10^6$
210	0,17	$0,259 \cdot 10^6$	210	0,14	$0,315 \cdot 10^6$
220	0,16	$0,303 \cdot 10^6$	220	0,13	$0,372 \cdot 10^6$

Примеры расчетов стержней на устойчивость

Пример 1. Определить коэффициенты запаса устойчивости для стержней 1 и 2 (рис. 2).

Дано: $P = 190$ кН, $l = 4,3$ м, $d = 95$ мм,

$\delta = 8$ мм. Материал - сталь Ст. 5.

$E = 2,1 \cdot 10^5$ МПа, $\sigma_{\text{тл}} = 240$ МПа,

$G_{\text{тл}} = 280$ МПа.

Решение. Коэффициент запаса устойчивости $\gamma_{\text{уст}} = \frac{P_{\text{кр}}}{P}$.

Для определения критической силы $P_{\text{кр}}$ предварительно находим гибкость стержня

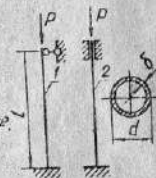


Рис. 2

$$\lambda = \frac{\mu l}{i}, \text{ где } i = \sqrt{\frac{I}{F}}.$$

Площадь поперечного сечения

$$F = \frac{\pi d^2}{4} (1 - c^2),$$

$$\text{где } c = \frac{d - 2\delta}{d} = \frac{95 - 2 \cdot 8}{95} = 0,83;$$

$$F = \frac{\pi \cdot 95^2}{4} (1 - 0,83^2) = 2200 \text{ см}^2.$$

Осевой момент инерции

$$I = \frac{\pi d^4}{64} (1 - c^4) = \frac{\pi \cdot 95^4}{64} (1 - 0,83^4) = 2100 \text{ см}^4.$$

Радиус инерции

$$i = \sqrt{\frac{I}{F}} = \sqrt{\frac{2100}{2200}} = 30,9 \text{ см}.$$

Стержень 1. Учитывая, что $\mu = 0,7$ (табл. 1), находим гиб-

кость стержня $\lambda = \frac{\mu l}{i} = \frac{0,7 \cdot 4,3}{\frac{309}{10^3}} = 97$.

Предельная гибкость для стержня из стали Ст.3

$$\lambda_n = \pi \sqrt{\frac{E}{\sigma_{\text{пк}}}} = \pi \sqrt{\frac{21 \cdot 10^4}{240 \cdot 10^6}} = 93.$$

Так как $\lambda > \lambda_n$, то критическое значение силы P определяем по формуле Эйлера:

$$P_{\text{кр}} = \frac{\pi^2 EI}{(\mu l)^2} = \frac{\pi^2 \cdot 21 \cdot 10^4 \cdot 10^8}{(0,7 \cdot 4,3)^2} = 4,80 \cdot 10^5 \text{ Н}.$$

Коэффициент запаса устойчивости

$$n_y = \frac{P_{\text{кр}}}{P} = \frac{4,80 \cdot 10^5}{190 \cdot 10^3} = 2,5.$$

Стержень 2. Учитывая, что $\mu = 0,5$ (табл. I), находим

$$\lambda = \frac{\mu l}{i} = \frac{0,5 \cdot 4,3}{\frac{309}{10^3}} = 69.$$

В этом случае $\lambda < \lambda_n$, следовательно,

$$P_{\text{кр}} = \sigma_{\text{кр}} \cdot F = [\sigma_{\text{кр}} - \sigma_{\text{пк}} - \sigma_{\text{пк}} \left(\frac{\lambda}{\lambda_n} \right)^2] \cdot F = 10^6 [280 - (240 - 240 \left(\frac{69}{93} \right)^2)] \cdot 22 \cdot 10^{-3} = 5,68 \cdot 10^5 \text{ Н}.$$

Коэффициент запаса устойчивости

$$n_y = \frac{P_{\text{кр}}}{P} = \frac{5,68 \cdot 10^5}{190 \cdot 10^3} = 3,0.$$

Пример 2. Выполнить поперечный расчет на устойчивость стержней I и 2 (рис. 2), используя данные примера I. Для стали Ст.3 принять $[\sigma] = 180 \text{ МПа}$.

Решение. Поперечный расчет состоит в сопоставлении фактического напряжения σ и допускаемого напряжения $\varphi[\sigma]$. Фактическое напряжение $\sigma = \frac{P}{F} = \frac{190 \cdot 10^3}{22 \cdot 10^{-3}} = 86 \text{ МПа}$.

Чтобы определить допускаемые напряжения при расчете на устойчивость, следует вычислять соответствующие коэффициенты φ .

Стержень I. Гибкость стержня $\lambda = 97$ (см. пример I). В табл. 2 для стали Ст.3 $\varphi = 0,62$ при $\lambda = 90$ и $\varphi = 0,51$ при $\lambda = 100$. Значение φ при $\lambda = 97$ получаем линейной интерполяцией $\varphi = 0,62 - \frac{0,62 - 0,51}{100 - 90} (97 - 90) = 0,593$.

Допускаемое напряжение $\varphi[\sigma] = 0,593 \cdot 180 = 98 \text{ МПа}$. Условие устойчивости $\sigma \leq \varphi[\sigma]$ выполнено: $86 < 98$.

Стержень 2. Гибкость стержня $\lambda = 69$ (см. пример I). По табл. 2, вновь прибегая к линейной интерполяции, находим $\varphi = 0,82 - \frac{0,82 - 0,76}{100 - 60} (69 - 60) = 0,766$.

Допускаемое напряжение $\varphi[\sigma] = 0,766 \cdot 180 = 138 \text{ МПа}$. Условие устойчивости $\sigma \leq \varphi[\sigma]$ выполнено: $86 < 138$.

Пример 3. Какую наибольшую силу P может передать шток (рис. 3), для которого нормы предусматривают шестикратный запас устойчивости?

Дано: $l = 1,9 \text{ м}$, $d = 120 \text{ мм}$.

Материал - сталь 30ХТУ.

$E = 2,1 \cdot 10^5 \text{ МПа}$, $\sigma_{\text{тс}} = 500 \text{ МПа}$,

$\sigma_{\text{пк}} = 350 \text{ МПа}$.

Концы штока считать шарнирно опертыми.

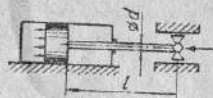


Рис. 3

Решение. Наибольшая допустимая сила $P = P_{\text{кр}}$, где $n_y = 6$.

Чтобы определить критическую силу $P_{\text{кр}}$, найдем предварительно гибкость штока. Радиус инерции

$$i = \sqrt{I/F} = d/4 = 120/4 = 30 \text{ мм}.$$

При шарнирных концевых опорах $\mu = 1$ (см. табл. I) и

$$\lambda = \frac{\mu l}{i} = \frac{1 \cdot 1,9}{0,03} = 63.$$

Предельная гибкость стержня из стали 30ХТУ

$$\lambda_n = \pi \sqrt{\frac{E}{\sigma_{\text{пк}}}} = \pi \sqrt{\frac{21 \cdot 10^4}{350 \cdot 10^6}} = 77.$$

Фактическая гибкость λ меньше предельной, следовательно, критическую силу находим по формуле

$$P_{\text{кр}} = [\sigma_{\text{тс}} - (\sigma_{\text{тс}} - \sigma_{\text{пк}}) \left(\frac{\lambda}{\lambda_n} \right)^2] \cdot F = 10^6 [500 - (500 - 350) \left(\frac{63}{77} \right)^2] \cdot \pi \cdot \frac{120^2}{4} = 4,51 \cdot 10^6 \text{ Н}.$$

Наибольшая допустимая сила

$$P = \frac{P_{\text{кр}}}{n_y} = \frac{4,51 \cdot 10^6}{6} = 7,52 \cdot 10^5 \text{ Н} = 752 \text{ кН}.$$

Пример 4. Определить номер профиля стойки по ГОСТ 8239-72 при $P = 400 \text{ кН}$ и $l = 1 \text{ м}$ (рис. 4). Материал - сталь Ст.4, $[\sigma] = 160 \text{ МПа}$.

Решение. Из условия устойчивости $\frac{P}{F} \leq \varphi[\sigma]$ нельзя непосредственно вычислить площадь поперечного сечения $F = P/(\varphi[\sigma])$, так как неизвестен коэффициент φ , зависящий от гибкости λ , следовательно, от F . Задача решается методом последовательных приближений. Выбираем произвольно некоторое начальное значение коэффициента φ , например $\varphi = 0,5$. При этом значении

требуемая площадь поперечного сечения стойки

$$F = \frac{P}{\varphi[\sigma]} = \frac{400 \cdot 10^3}{0,5 \cdot 160 \cdot 10^6} = 5 \cdot 10^{-3} \text{ м}^2 = 50 \text{ см}^2.$$

По ГОСТ 8239-72 этому значению F соответствует двутавр № 30а ($F = 49,2 \text{ см}^2$, $i = 2,95 \text{ см}$). Находим гибкость стойки, учитывая, что $\mu = 2$ (см. табл. I)

$$\lambda = \frac{\mu l}{i} = \frac{2 \cdot 1}{2,95 \cdot 10^{-2}} = 68.$$

и по табл. 2, интерполируя, находим $\varphi = 0,82 - \frac{0,82 - 0,81}{10 - 60} (68 - 60) = 0,82$.

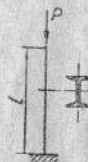


Рис. 4

Допускаемое напряжение для стойки из двутавра № 30а

$$\varphi[\sigma] = 0,82 \cdot 160 = 131 \text{ МПа.}$$

Фактическое напряжение

$$\sigma = \frac{P}{F} = \frac{400 \cdot 10^3}{49,2 \cdot 10^{-4}} = 80 \cdot 10^6 \text{ Па} = 80 \text{ МПа.}$$

Это напряжение существенно отличается от допускаемого и, следовательно, необходим пересчет. Заметим, что необходимость перерасчета диктуется здесь не нарушением условия устойчивости, которое заведомо выполнено, так как $\sigma < \varphi[\sigma]$, а стремлением уменьшить расход материала, заменив двутавр № 30а более легким профилем. Новое значение коэффициента φ вычисляем как среднее арифметическое двух предшествующих значений

$$\varphi = \frac{0,51 + 0,82}{2} = 0,66.$$

Требуемая площадь поперечного сечения

$$F = \frac{P}{\varphi[\sigma]} = \frac{400 \cdot 10^3}{0,66 \cdot 160 \cdot 10^6} = 3,77 \cdot 10^{-3} \text{ м}^2 = 37,7 \text{ см}^2.$$

По ГОСТ 8239-72 этому значению F соответствует двутавр № 24а ($F = 37,5 \text{ см}^2$, $l = 2,63 \text{ см}$).

Гибкость

$$\lambda = \frac{l}{i} = \frac{2,1}{2,63 \cdot 10} = 76.$$

По табл. 2 находим

$$\varphi = 0,81 - \frac{76 - 70}{80 - 70} = (0,81 - 0,73) = 0,77$$

и вычисляем допускаемое напряжение

$$\varphi[\sigma] = 0,77 \cdot 160 = 123 \text{ МПа.}$$

Фактическое напряжение

$$\sigma = \frac{P}{F} = \frac{400 \cdot 10^3}{37,5 \cdot 10^{-4}} = 107 \cdot 10^6 \text{ Па} = 107 \text{ МПа.}$$

Фактическое и допускаемое напряжения отличаются друг от друга более чем на 10 %, поэтому проведем второй перерасчет.

Выбираем $\varphi = \frac{0,66 + 0,77}{2} = 0,72$, определяем площадь

$$F = \frac{P}{\varphi[\sigma]} = \frac{400 \cdot 10^3}{0,72 \cdot 160 \cdot 10^6} = 3,47 \cdot 10^{-3} \text{ м}^2 = 34,7 \text{ см}^2.$$

по ГОСТ 8239-72 находим двутавр № 24 ($F = 34,8 \text{ см}^2$, $l = 2,37 \text{ см}$), вычисляем гибкость

$$\lambda = \frac{l}{i} = \frac{2,1}{2,37 \cdot 10} = 84$$

и по табл. 2 получаем

$$\varphi = 0,75 - \frac{84 - 80}{90 - 80} = (0,75 - 0,69) = 0,73.$$

Допускаемое напряжение $\varphi[\sigma] = 0,73 \cdot 160 = 117 \text{ МПа.}$

Фактическое напряжение

$$\sigma = \frac{P}{F} = \frac{400 \cdot 10^3}{34,8 \cdot 10^{-4}} = 115 \cdot 10^6 \text{ Па} = 115 \text{ МПа.}$$

Итак, выбираем двутавр № 24, для которого расхождение между фактическим и допускаемым напряжениями оказалось менее 2 %.

Пример 5. Определить размер a поперечного сечения стержня (сталь Ст. 4), найти критическую силу и коэффициент запаса устойчивости (рис. 5).

Дано: $P = 200 \text{ кН}$, $l = 640 \text{ мм}$, $[\sigma] = 160 \text{ МПа}$,

$E_{ст} = 200 \text{ МПа}$, $E_{ст} = 240 \text{ МПа}$, $E = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа}$.

Решение. Определения размера сечения.

Размер сечения может быть найден не только рассмотренным в примере 4 методом последовательных приближений, но и непосредственно из условия устойчивости

$$\frac{\Delta^2}{\varphi} = \frac{(\mu l)^2 [\sigma]}{P} \cdot K.$$

если коэффициент формы сечения $K = \frac{F^2}{I}$ постоянен. Заме-

тим, что условие $K = \text{const}$ для сечений двутавровой формы по ГОСТ 8239-72 не выполняется, что и заставило нас использовать в примере 4 метод последовательных приближений. Для заданного сечения прямоугольной формы (рис. 5) площадь $F = 2a \cdot 3a = 6a^2$, наименьший осевой момент инерции $I = I_y = \frac{3a \cdot (2a)^3}{12} = 2a^4$,

коэффициент формы сечения $K = \frac{36a^4}{2a^4} = 18$.

Учитывая, что $\mu = 2$ (табл. 1), вычисляем

$$\frac{\Delta^2}{\varphi} = \frac{(\mu l)^2 [\sigma]}{P} \cdot K = \frac{(2 \cdot 0,64)^2 \cdot 160 \cdot 10^6}{200 \cdot 10^3} \cdot 18 = 23590$$

и по табл. 2 находим $\varphi = 0,52$. Условие устойчивости

$\frac{P}{F} \leq \varphi[\sigma]$ здесь имеет вид $\frac{P}{6a^2} \leq \varphi[\sigma]$, следовательно,

$$a \geq \sqrt{\frac{P}{6\varphi[\sigma]}} = \sqrt{\frac{200 \cdot 10^3}{6 \cdot 0,52 \cdot 160 \cdot 10^6}} = 0,02 \text{ м} = 20 \text{ мм}$$

Определение критической силы.

Предварительно находим радиус инерции

$$i = \sqrt{\frac{I}{F}} = \sqrt{\frac{2a^4}{6a^2}} = \sqrt{\frac{2a^2}{3}}$$

и затем вычисляем гибкость стержня

$$\lambda = \frac{\mu l}{i} = \frac{\mu l \sqrt{3}}{a} = \frac{2 \cdot 640 \sqrt{3}}{20}$$

Предельная гибкость

$$\lambda_n = \sqrt{\frac{E_{ст}}{E}} = \sqrt{\frac{240 \cdot 10^3}{200 \cdot 10^3}} = 1,1$$

следовательно, $\lambda > \lambda_n$, т.е. условие применимости формулы Эйлера

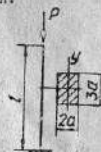


Рис. 5

ра выполнено. Критическая сила

$$P_{кр} = \frac{\pi^2 EI}{(\mu L)^2} = \frac{\pi^2 \cdot 20^4}{(\mu L)^2} = \frac{\pi^2 \cdot 8 \cdot 10^8 \cdot 2 \cdot 008^2}{(2 \cdot 064)^2} = 385 \cdot 10^3 \text{ Н} = 385 \text{ кН}.$$

Коэффициент запаса устойчивости

$$\mu_y = \frac{P_{кр}}{P} = \frac{385}{200} = 1.9.$$

Именно!

Энергетический метод определения коэффициента приведения длины

Коэффициент приведения длины μ стержня постоянного сечения находят из уравнения

$$\frac{EI}{\int_0^L (V')^2 dz} = \frac{\pi^2 EI}{(\mu L)^2},$$

в котором левая часть представляет собой критическую силу, определенную энергетическим способом, а в правой части эта же сила представлена формулой Эйлера. Для определения

$$P_{кр} = \frac{EI}{\int_0^L (V')^2 dz}$$

следует выбрать функцию V , т.е. задать форму оси стержня. Не обсуждая здесь достоинств различных вариантов выбора функции V , заметим лишь, что энергетический метод дает значение критической силы, которое всегда не ниже точного значения, полученного интегрированием дифференциального уравнения оси стержня. Удобно представить V в виде полинома $V = C_0 + C_1 Z + C_2 Z^2 + \dots + C_n Z^n$. Значения коэффициентов $C_0, C_1, \dots, C_n$ следует выбрать так, чтобы функция V удовлетворяла условиям закрепления стержня (граничным условиям).

Степень n полинома, содержащего $n+1$ членов, должна быть равна числу этих условий. Известно, что линейное перемещение V , угловое перемещение θ , изгибающий момент M и поперечная сила Q

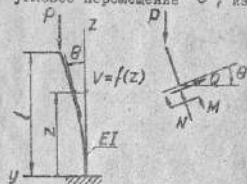


Рис. 6

(рис. 6) связаны соотношениями $\theta = V'$, $M = EI V''$, $Q = EI V'''$.

Для стержня, показанного на рис. 6, линейное и угловое перемещение в опоре равны нулю, отсутствуют изгибающий момент в верхнем сечении и поперечная сила в нижнем сечении. Эти граничные условия в выбранной системе координат имеют вид:

- 1) $V=0$ при $Z=0$, 2) $V'=0$ при $Z=0$,
- 3) $V''=0$ при $Z=L$, 4) $V'''=0$ при $Z=L$.

8

* Это не так, что Голубев $R = \frac{dM}{dz} + P \cdot \theta$

Выбирая $V = C_0 + C_1 Z + C_2 Z^2 + C_3 Z^3 + C_4 Z^4$, получаем систему линейных уравнений для вычисления коэффициентов C_i полинома. Например, для стержня, представленного на рис. 7, уравнения составляются на основе следующих соображений. Нижняя опора представляет линейному и угловому перемещением, на средней опоре отсутствует только линейное перемещение, на верхней опоре отсутствует только угловое перемещение, поперечная сила в верхнем сечении стержня равна нулю. Соответственно этому можно записать:

- 1) $V=0$ при $Z=0$, 2) $V'=0$ при $Z=0$,
- 3) $V=0$ при $Z=L$, 4) $V'=0$ при $Z=L$,
- 5) $V''=0$ при $Z=L$.

Функция $V=f(z)$ в первую очередь должна удовлетворять условиям закрепления стержня, т.е. ограничениям, наложенным на V и V' . От этого зависит точность решения. Если же дополнительно использовать условия, касающиеся V'' и V''' , то точность решения повышается.

Рассмотрим пример, который по содержанию и объему соответствует расчетно-графическому заданию № 6.

Пример 6. Энергетическим способом определить коэффициент приведения длины стержня постоянного поперечного сечения (рис. 8). Вычислить размер поперечного сечения при $P = 320$ кН и $L = 2$ м. Найти критическое значение силы и определить коэффициент запаса устойчивости.

Материал - сталь Ст.3, $E = 2 \cdot 10^5$ МПа, $G_{кр} = 240$ МПа, $G_{нч} = 200$ МПа, $[G] = 160$ МПа.

Решение. Определение коэффициента приведения длины стержня. Критическая сила

$$P_{кр} = \frac{EI}{\int_0^L (V')^2 dz}$$

Изобразим форму оси стержня после потери устойчивости и выберем систему координат (рис. 9). В концевых сечениях стержня отсутствуют линейные перемещения и изгибающие моменты:

- 1) $V=0$ при $Z=0$, 2) $V'=0$ при $Z=L$,
- 3) $V''=0$ при $Z=0$, 4) $V'''=0$ при $Z=L$.

Если бы это была y -о-я, для μ^2 в известном полиноме и продела не было бы модификации

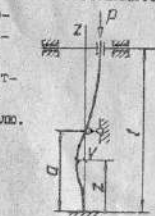


Рис. 7

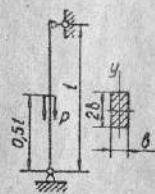


Рис. 8

9

А приращение $V = C \sin \frac{\pi z}{L}$?

Имея четыре граничных условия, представим упругую линию стержня полиномом четвертой степени, содержащим пять неизвестных коэффициентов: $V = C_0 + C_1 z + C_2 z^2 + C_3 z^3 + C_4 z^4$. Тогда $V' = C_1 + 2C_2 z + 3C_3 z^2 + 4C_4 z^3$, $V'' = 2C_2 + 6C_3 z + 12C_4 z^2$. Из условий (1) и (3) следует, что $C_0 = C_4 = 0$. Условие (2) и (4) дает уравнения $C_1 + C_3 = 0$, $6C_3 + 12C_4 = 0$, решая которые относительно C_1 и C_3 , получим $C_1 = C_3 = C$, $C_2 = 0$. Уравнение упругой линии $V_0 = 0 + C z^3 + 0 + C z^4 = C z^3 + C z^4$. Итак, с учетом граничных условий функция V имеет вид $V = C z (z^3 + 2z^2 + z)$, $V' = C (3z^2 + 4z^3)$.

Числитель

$$\int_0^L V^2 dz = C^2 \int_0^L (z^3 + 2z^2 + z)^2 dz = C^2 \int_0^L (z^6 + 4z^5 + 5z^4 + 4z^3 + z^2) dz = C^2 \left[\frac{z^7}{7} + \frac{4z^6}{6} + \frac{5z^5}{5} + \frac{4z^4}{4} + \frac{z^3}{3} \right]_0^L = \frac{C^2 L^7}{42} (1 + \frac{10}{3} + 5 + 4 + \frac{2}{3}) = \frac{C^2 L^7}{42} \cdot 18 = \frac{3}{7} C^2 L^7$$

Знаменатель

$$\int_0^L (V')^2 dz = C^2 \int_0^L (3z^2 + 4z^3)^2 dz = C^2 \int_0^L (9z^4 + 24z^5 + 16z^6) dz = C^2 \left[\frac{9z^5}{5} + \frac{24z^6}{6} + \frac{16z^7}{7} \right]_0^L = \frac{C^2 L^7}{35} (9 + 24 + \frac{160}{7}) = \frac{C^2 L^7}{35} \cdot \frac{241}{7} = \frac{241}{245} C^2 L^7$$

Критическая сила

$$P_{кр} = EI \frac{241/5}{17/70} = 19,76 \frac{EI}{L^2}$$

Из уравнения $19,76 \frac{EI}{L^2} = \frac{\pi^2 EI}{\mu^2 L^2}$

$$\mu = \sqrt{5/19,76} = 0,707$$

находим коэффициент приведения длины

Отметим, что точное решение задачи методом интегрирования дифференциального уравнения оси стержня дает $\mu = 0,727$. Следовательно, приближенный результат, полученный нами энергетическим методом, имеет погрешность менее 3%, т.е. отличается достаточной точностью. Если при решении задачи вместо полинома четвертой степени ограничиться полиномом второй степени $V = C_0 + C_1 z + C_2 z^2$, т.е. удовлетворить лишь условиям закрепления (1) и (2), то результат будет менее точным ($\mu = 0,641$) и погрешность составит около 12%.

Вычисление размеров сечения.

Условие устойчивости $P/F = \varphi [C]$. Учитывая, что $F = 26^2$ (см. рис. 8), получим $\delta = \sqrt{\frac{P}{26^2 [C]}}$. Для определения φ найдем вначале отношение $\frac{I^2}{\delta^4} = \frac{I^2}{\frac{P^2}{26^4 [C]^2}} = \frac{26^4 I^2}{P^2 [C]^2} K$. Здесь $K = \frac{F^2}{I} = \frac{(26^2)^2}{\frac{26^4 I^2}{P^2 [C]^2}} = 24$, где $I = \frac{26 \cdot \delta^3}{12} = \frac{\delta^4}{6}$. Следовательно, $I = \frac{\delta^4}{6}$.

10

$$\frac{\lambda^2}{C} = \frac{(0,707 \cdot 2) 160 \cdot 10^6}{320 \cdot 10^3} = 24000$$

По табл. 2 находим $\varphi = 0,51$. Размер сечения $\delta = \sqrt{\frac{P}{24 [C]}} = \sqrt{\frac{320 \cdot 10^3}{2 \cdot 0,51 \cdot 160 \cdot 10^6}} = 44,7 \cdot 10^{-3} = 44,7 \text{ мм}$.

Определение критической силы и коэффициента запаса устойчивости.

Радиус инерции поперечного сечения

$$i = i_y = \sqrt{\frac{I_y}{F}} = \sqrt{\frac{\delta^4/6}{26^2}} = \frac{\delta}{2\sqrt{3}}$$

Гибкость стержня

$$\lambda = \frac{\mu L}{i} = \frac{0,707 \cdot 2 \cdot 2,5}{\frac{44,7 \cdot 10^{-3}}{2\sqrt{3}}} = 109$$

Предельная гибкость

$$\lambda_D = \sqrt{\frac{E F}{C_1}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 10^5 \cdot 10^3}{200}} = 100$$

условие применимости формулы Эйлера $\lambda > \lambda_D$ выполнено.

Критическая сила

$$P_{кр} = \frac{\pi^2 E I}{(\mu L)^2} = \frac{\pi^2 \cdot 2 \cdot 10^5 \cdot 0,045^4}{(0,707 \cdot 2)^2 \cdot 6} = 674 \cdot 10^3 \text{ Н} = 674 \text{ кН}$$

Коэффициент запаса устойчивости

$$n_y = \frac{P_{кр}}{P} = \frac{674}{320} = 2,1$$

РАСЧЕТНО-ГРАФИЧЕСКОЕ ЗАДАНИЕ №6
"РАСЧЕТ СКОТОГО СТЕРЖНЯ"

1. Энергетическим методом определить коэффициент приведения длины стержня постоянного поперечного сечения.
 2. Вычислить размер поперечного сечения стержня при $P = 200 \text{ кН}$ и $L = 3 \text{ м}$.
 3. Найти критическое значение силы P и определить коэффициент запаса устойчивости.
- Материал - сталь Ст.3, $E = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа}$, $\sigma_{кр} = 240 \text{ МПа}$, $\sigma_{нч} = 200 \text{ МПа}$, $[C] = 160 \text{ МПа}$.

Таблица 1

Схема закрепления и нагружения стержня

1	2	3	4	5	6

Форма поперечного сечения

1	2	3	4
			

Таблица 3

Значение отношения

1	2	3	4	5	6
0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8