

Бесплатно

Министерство высшего и среднего специального образования СССР

Московское ордена Ленина, ордена Октябрьской Революции
и ордена Трудового Красного Знамени
высшее техническое училище им. Н. Э. Баумана

И. Е. СЕМЕНОВ-ЕЖОВ, В. Н. ШИТИКОВ

ИЗГИБ БАЛОК

Методические указания для студентов
вечернего факультета по курсу
«Сопротивление материалов»

Данные методические указания издаются в соответствии с учебным планом. Рассмотрены кафедрой К-5 03.04.84 г., методической комиссией факультета К и учебно-методическим управлением.

Рецензент: старший преподаватель к.т.н. Кулешова З.Г.

© Московское высшее техническое училище им. Н.Э.Баумана

Корректор Л.И.Малютина

Заказ 1165 Объем 2 п.л. (1,75 уч.-изд. I). Тираж 700 экз.
Бесплатно. Подписано к печати План 1984 г., № 78.
28.06.84 г.

Типография МВТУ. 107005, Москва, Б-5, 2-я Бауманская, 5.

Предисловие

Методические указания предназначены для студентов вечернего факультета. В них изложена методика решения задач по теме "Изгиб балок" и приведены примеры расчета статически определимых и статически неопределимых систем на прочность и жесткость при прямом изгибе. Для удобства использования материала пособия при самостоятельной работе над курсом все основные понятия по данной теме и расчетные зависимости приведены в начале пособия. Наиболее подробно рассмотрены два вопроса, вытекающие подчас затруднения у студентов-вечерников при освоении данной темы. Это практика построения эпюр поперечных сил и изгибающих моментов и задача определения перемещений в балке способом Мора-Верещагина. Терминология и обозначения, используемые в данных методических указаниях, соответствует терминологии и обозначениям, принятым в учебнике В.И.Феодосьева "Сопротивление материалов" (М.: Наука, 1979). Общие рекомендации, полезные для решения задач по данной теме, изложены также в учебных пособиях: Л.В.Бубнова, Н.А.Сухова, Г.Г.Геленина "Исследование внутренних силовых факторов в поперечных сечениях брусьев" ч. I (М.: МВТУ, 1977) и А.С.Газарян, Г.П.Клюева, Н.А.Сухова "Расчетно-графические работы по сопротивлению материалов. Изгиб балок и плоских рам" (М.: МВТУ, 1980).

Обозначения

(в скобках указаны единицы измерения рассматриваемых параметров)

- x, y, z - координатные оси;
- P - сосредоточенная внешняя сила, $[H]$;
- q - интенсивность распределенной нагрузки, $[H/m]$;
- M - сосредоточенный внешний момент, $[Hm]$;
- R - реактивная сила в опоре, $[H]$;
- Q_y - поперечная сила, действующая вдоль оси y , $[H]$;
- M_x - изгибающий момент, действующий относительно оси x , $[Hm]$;
- l - длина балки, $[m]$;
- b, h, d - размеры поперечных сечений, $[m]$;
- F - площадь поперечного сечения, $[m^2]$;
- S_x - статический момент сечения относительно оси x , $[m^3]$;
- J_x - осевой момент инерции сечения относительно оси x , $[m^4]$;
- W_x - момент сопротивления сечения изгибу относительно центральной оси x , $[m^3]$;
- σ - нормальное напряжение, $[Pa] = [H/m^2]$;
- $[\sigma]$ - допускаемое напряжение, $[Pa]$;
- σ_{tr} - предел текучести при растяжении, $[Pa]$;
- σ_{sc} - предел текучести при сжатии, $[Pa]$;
- E - модуль упругости I-го рода, $[Pa]$;
- n_T - коэффициент запаса прочности по текучести;
- δ - линейное перемещение, $[m]$;
- θ - угловое перемещение, $[рад]$.

В пособиях используются также единицы измерения, производные от единиц СИ:

- миллиметры, $1 \text{ мм} = 10^{-3} \text{ м}$;
- сантиметры, $1 \text{ см} = 10^{-2} \text{ м}$;
- килоньютны, $1 \text{ кН} = 10^3 \text{ Н}$;
- мегапаскали, $1 \text{ МПа} = 10^6 \text{ Па}$.

I. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И РАСЧЕТЫ ЗАВИСИМОСТИ

Под изгибом понимается такой вид нагружения, при котором в поперечном сечении стержня возникает изгибающий момент.

Балкой называется стержень, работающий на изгиб.

При изгибе справедливы следующие дифференциальные соотношения:

$$\frac{dM_x}{dz} = Q_y, \quad \frac{dQ_y}{dz} = q.$$

При построении эпюр используются следующие правила для определения знаков изгибающего момента M_x и поперечной силы Q_y . В выбранной системе координат (рис. I.1) изгибающий момент положителен при положительной кривизне вогнутой оси балки, т.е. при $M_x > 0$.

Стержень своей вогнутой стороной обращен вверх (рис. I.1a). Отрицательной кривизне соответствует отрицательный изгибающий момент (рис. I.1б).

Поперечная сила Q_y в данном сечении положительна, если для части балки, расположенной слева от сечения, она направлена вниз, а для правой - вверх (рис. I.2a). В противоположном случае Q_y имеет отрицательное значение (рис. I.2б).

Расчет на прочность при изгибе

Условие прочности имеет вид:

$$\sigma_{max} \leq [\sigma],$$

где $\sigma_{max} = M_{xmax} / W_x$, $[\sigma] = \sigma_T / n_T$.

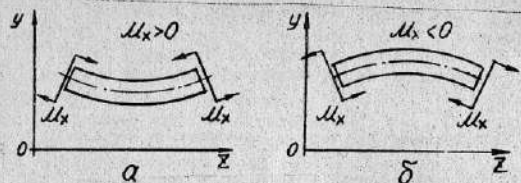


Рис. I.1

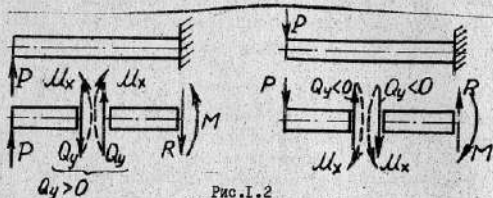


Рис. I.2

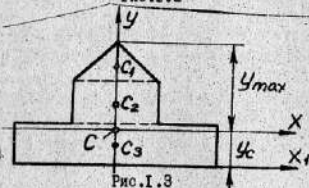


Рис. I.3

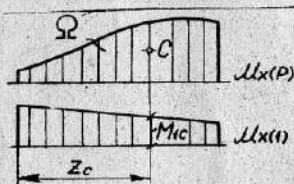


Рис. I.4

Момент сопротивления сечения изгибу определяется из выражения

$$W_x = J_x / y_{\max},$$

где J_x — осевой момент инерции сечения относительно главной, центральной оси x , являющейся нейтральной линией; $y_{\max}$ — расстояние от нейтральной линии до наиболее удаленной точки сечения (рис. I.3).

Положение оси x для сечения, имеющего одну ось симметрии y , находится с помощью формулы

$$y_c = \frac{S_{x_1}}{F} = \frac{\sum_{i=1}^n y_{ci} F_i}{F},$$

где y_c — ордината центра тяжести сечения в системе координат x_1, y ;

S_{x_1} — статический момент сечения относительно вспомогательной оси x_1 .

В общем случае осевой момент инерции J_x определяется равенством

$$J_x = \int_F y^2 dF.$$

На практике его находят, используя известные значения моментов инерции простейших фигур, применяя в случае необходимости формулу изменения момента инерции при параллельном переносе осей:

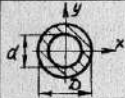
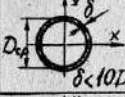
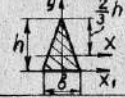
$$J_x = J_{x_1} - y_c^2 F.$$

Моменты инерции и моменты сопротивления некоторых сечений, имеющих вид простейших фигур, приведены в таблице I.1.

Определение перемещений

Перемещения δ при изгибе часто находят с помощью интеграла Мора по формуле

Таблица 1.1

Сечение	J_x	J_{x_1}	W_x
	$\frac{\pi d^4}{64}$	—	$\frac{\pi d^3}{32}$
	$\frac{\pi D^4}{64}(1-c^4)$ $c=d/D$	—	$\frac{\pi D^3}{32}(1-c^4)$
	$\frac{\pi D_{cp}^3 \delta}{8}$	—	$\frac{\pi D_{cp}^2 \delta}{4}$
	$\frac{bh^3}{12}$	$\frac{bh^3}{3}$	$\frac{bh^2}{6}$
	$\frac{bh^3}{36}$	$\frac{bh^3}{12}$	$\frac{bh^2}{24}$

$$\delta = \int \frac{M_{x0} \cdot M_{x1} dz}{E J_x},$$

где M_{x0} — выражение для изгибающего момента в текущем сечении балки, вызванного действием заданной нагрузки;

M_{x1} — аналогично выражение для момента, вызванного действием единичной нагрузки, приложенной в заданном сечении и в том направлении, в котором нужно определить перемещение. Для балок постоянной жесткости EJ_x удобнее определять перемещение методом Верещагина, который представляет собой графический способ вычисления интеграла Мора (рис. 1.4):

$$\delta = \frac{\Omega \cdot M_{ic}}{E J_x},$$

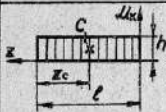
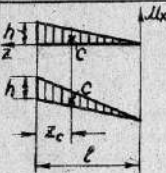
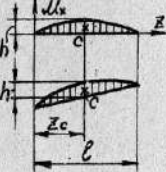
где Ω — площадь эпюры M_{x0} , которая может быть как криволинейной, так и прямолинейной;

M_{ic} — ордината линейной эпюры, расположенной под центром тяжести криволинейной.

Если обе эпюры — M_{x0} и M_{x1} — линейные, то площадь можно взять на любой эпюре при условии, что эпюра, на которой берется ордината, на рассматриваемом участке не имеет изломов и скачков.

Положение центров тяжести некоторых эпюр, их площади и соответствующие уравнения моментов приведены в таблице 1.2.

Таблица 1.2

Эпюра M_x	z_c	Ω	Примечание
	$\frac{l}{2}$	lh	$M_x = \text{const}$
	$\frac{l}{3}$	$\frac{lh}{2}$	$M_x = Ax$
	$\frac{l}{4}$	$\frac{lh}{3}$	$M_x = \frac{qx^2}{2}$
	$\frac{l}{2}$	$\frac{2}{3}lh$	$M_x = \frac{ql^2}{2}x - \frac{qx^3}{2}$ $h = \frac{ql^2}{8}$

2. АНАЛИЗ ВНЕШНИХ СИЛОВЫХ ФАКТОРОВ
ПРИ ИЗГИБЕ

При расчёте балки на прочность и жёсткость необходимо прежде всего определить изгибающие моменты M_x и поперечные силы Q_y , возникающие в её сечениях. Для этого сначала с помощью уравнений статического равновесия находят реакции опор, а затем, используя метод сечений, строят эпюры Q_y и M_x .

Из приведённого на рисунке 1.1 правила знаков следует, что эпюра моментов строится на вогнутой (осятой) стороне балки. Это обстоятельство используется для изображения примерного вида её изогнутой оси, кривизна которой определяется знаком M_x . Рассмотрим примеры построения эпюр внутренних силовых факторов Q_y и M_x в балках и изобразим примерный вид их изогнутых осей.

Пример 2.1.

Для заданной балки (рис. 2.1) построить эпюры Q_y и M_x .

Решение. С помощью уравнений статического равновесия определяем реакции опор.

$$\sum M_A = 0; R_B \cdot 3l - Pl = 0, R_B = P/3.$$

$$\sum M_B = 0; -R_A \cdot 3l + P \cdot 2l = 0, R_A = 2P/3.$$

Горизонтальная реакция $H_A = 0$, так как на балку не действуют активные внешние силы, имеющие проекцию в горизонтальном направлении.

Правильность определения R_A и R_B можно установить с помощью третьего уравнения равновесия

$$\sum P_y = 0, R_A + R_B - P = P/3 + 2P/3 - P = 0.$$

Следовательно, реакции опор найдены верно. Поперечные силы и изгибающие моменты находим с помощью метода сечений. Данная балка имеет два участка. Рассмотрим равновесие отсечённых частей балки по участкам. Направления внутренних силовых факторов, заменяющих действие отброшенной части балки на оставшуюся, принимаем положительными в соответствии с правилами знаков, изложенными в пункте 1.

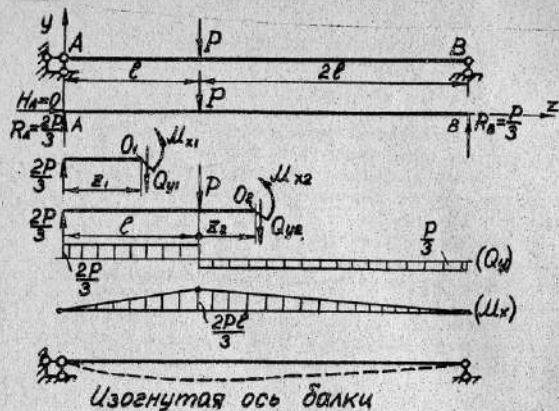
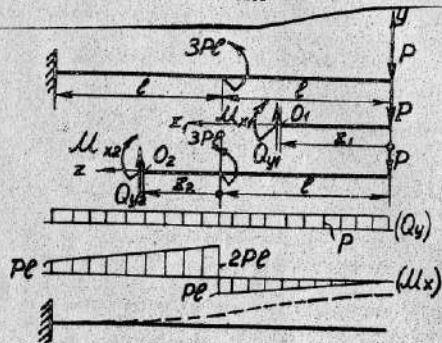


Рис. 2.1



Изогнутая ось балки

Рис. 2.2

На первом участке ($0 \leq z_1 \leq l$) имеем

$$\Sigma P_y = 0, 2P/3 - Q_{y1} = 0, Q_{y1} = 2P/3.$$

$$\Sigma M_{O1} = 0, M_{x1} - 2Pz_1/3 = 0, M_{x1} = 2Pz_1/3.$$

Из расчёта следует, что $Q_{y1} > 0$ и $M_{x1} \geq 0$. Это указывает на то, что действительные направления Q_{y1} и M_{x1} совпадают с показанными на рисунке. Следовательно, поперечная сила на первом участке положительна, а изгибающий момент неотрицателен и эпюры этих факторов располагаются выше нулевой линии.

Выражения для Q_{y1} и M_{x1} представляют собой линейные функции (координата z_1 имеет нулевую или первую степень). Поэтому соответствующие эпюры строятся по двум точкам. Например, для построения эпюры M_{x1} достаточно определить величину изгибающего момента в опоре

A ($z_1 = 0, M_{x1} = 0$). в месте приложения силы P

($z_1 = l, M_{x1} = 2Pl/3$), построить соответствующие точки на эпюре и соединить их прямой.

Начало отсчёта координаты z_2 на втором участке удобно выбрать в начале участка, т.е. там, где приложена сила P. В этом случае границы участка определяются из условия $0 \leq z_2 \leq 2l$. Соответствующие уравнения равновесия имеют вид:

$$\Sigma P_y = 0; 2P/3 - P - Q_{y2} = 0, Q_{y2} = -P/3.$$

$$\Sigma M_{O2} = 0; M_{x2} - 2P(l + z_2)/3 + Pl = 0, M_{x2} = (2Pl - Pz_2)/3.$$

Знак минус в выражении для Q_{y2} говорит о том, что действительное направление Q_{y2} противоположно показанному на рисунке. Таким образом, поперечная сила на втором участке отрицательна и её эпюра располагается ниже нулевой линии. Момент M_{x2} неотрицателен на всей длине второго участка. Эпюра M_{x2} , так же, как и эпюра M_{x1} , располагается выше нулевой линии.

Дифференциальное соотношение

$$\frac{dM_x}{dz} = Q_y$$

(см. пункт I), позволяя проконтролировать правильность построения эпюр Q_y и M_x по некоторым визуальным признакам.

Для этого достаточно вспомнить, что первая производная функции M_x в некоторой точке интерпретируется, как тангенс угла наклона касательной, построенной на графике M_x в той же точке.

Поэтому изменение знака угла наклона эпюры M_x соответствует изменению знака силы Q_y . Большому углу наклона эпюры M_x соответствует большая ордината Q_y .

В том месте, где к балке приложена сосредоточенная сила, на эпюре Q_y будет скачок на величину этой силы, а на эпюре M_x излом, направленный навстречу силе.

Положительному изгибающему моменту соответствует положительная кривизна изогнутой оси балки, т.е. сжатие "волоки" балки располагается сверху. При построении изогнутой оси учитываются граничные условия, т.е. отсутствие вертикальных перемещений в опорах.

Пример 2.2.

Для заданной балки (рис. 2.2) построить эпюры Q_y и M_x .

Решение. В данном случае можно избежать определения реакций в опоре, если рассмотреть равновесие правой отсеченной части балки.

Для первого участка ($0 \leq z_1 \leq l$):

$$\Sigma P_y = 0, Q_{y1} = P; \Sigma M_{O1} = 0, M_{x1} = -Pz_1.$$

На втором участке ($0 \leq z_2 \leq l$):

$$\Sigma P_y = 0, Q_{y2} = P; \Sigma M_{O2} = 0, M_{x2} = 2Pl - Pz_2.$$

Важно отметить, что, например, выражение для M_{x2} ; полученное из уравнения равновесия, есть, в сущности, алгебраическая сумма внешних моментов, взятых справа от сечения (знаки внутренних и внешних силовых факторов определяются

аналогично). В общем случае можно сказать, что величина внутреннего силового фактора в некотором сечении балки равна алгебраической сумме соответствующих внешних силовых факторов, взятых по одну сторону от этого сечения.

Эпюры для линейных функций Q_y и M_x строятся аналогично эпюрам задачи 2.1.

В соответствии с зависимостями

$$\frac{dM_x}{dz} = Q_y$$

постоянному значению силы Q_y соответствует одинаковый угол наклона прямых на эпюре M_x .

Там, где приложен сосредоточенный момент, на эпюре M_x имеется скачок на величину этого момента.

Момент M_x отрицателен на первом участке и имеет положительное значение на втором. Поэтому изогнутая ось балки на первом участке обращена выпуклостью вверх (кривизна отрицательна, сжатие "волоки" снизу), а на втором — выпуклостью вниз. Точка перегиба совпадает с сечением, в котором момент меняет знак.

Угол поворота в заделке равен нулю, изогнутая ось в этой точке касательна к оси Z .

Пример 2.3.

Для заданной балки (рис. 2.3) построить эпюры Q_y и M_x .

Решение. Определяем реакции опор. При этом равномерно распределенную нагрузку мысленно заменяем равнодействующей

$$\Sigma M_A = 0, R_A 2l - 3ql \cdot 3l/2 = 0, R_A = 9ql/4.$$

$$\Sigma M_B = 0, 3ql \cdot l/2 - R_B 2l = 0, R_B = 3ql/4.$$

Так же, как в предыдущих примерах, горизонтальные реакции $H_A = 0$.

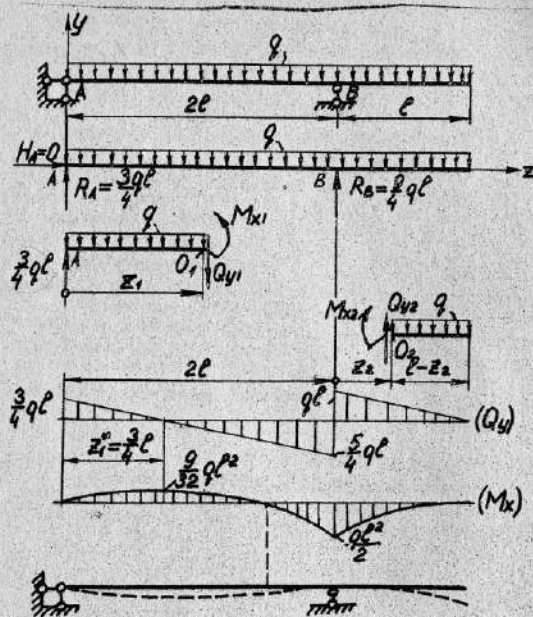
Проверка. $\Sigma P_y = 0, 9ql/4 + 3ql/4 - 3ql = 0$.

Следовательно, реакции опор найдены верно. Используя метод сечений находим поперечные силы и моменты.

Балка имеет два участка (границы между участками устанавливаются там, где приложены внешние силы, моменты или скачкообразно изменяется распределение нагрузки).

Первый участок: $0 \leq z_1 \leq 2l$.

$$\Sigma P_y = 0, -Q_{y1} + 3ql/4 - qz_1 = 0, Q_{y1} = 3ql/4 - qz_1.$$



Изогнутая ось балки

Рис. 2.3

$\Sigma M_0 = 0, M_{x1} - 3qlz_1/4 + qz_1^2/2 = 0, M_{x1} = 3qlz_1/4 - qz_1^2/2$. Силы Q_y изменяются по линейному закону, а моменты описываются уравнением второго порядка. При построении эпюры M_x предварительно вычисляем значения моментов в начале и в конце участка ($z_1 = 0, M_{x1} = 0, z_1 = 2l, M_{x1} = -ql^2/2$), а затем исследуем функцию M_{x1} на экстремум. Из дифференциальной зависимости при изгибе

$$\frac{dM_x}{dz} = Q_y$$

следует, что эпюра поперечных сил является графиком производной от момента M_x . Поэтому в точке, где $Q_y = 0$, на эпюре моментов имеет место экстремум. Положив $Q_{y1} = 0$, получим: $3ql/4 - qz_1^* = 0, z_1^* = 3l/4$.

$$M_{x1 \text{ экстр.}} = M_{x1}|_{z_1=3l/4} = 3ql/4 \cdot 3l/4 - q(3l/4)^2/2 = 9ql^2/32.$$

Получив три значения момента и учитывая, что кривизна эпюры M_x на этом участке отрицательна

$$(d^2 M_x / dz^2 = dQ_y / dz = -q),$$

строим её выпуклостью вверх, т.е. навстречу направлению распределенной нагрузки. Начало координат на втором участке удобно выбрать в точке B (рис. 2.3): $0 \leq z_2 \leq l$.

Из уравнения равновесия рассматриваемой части балки находим Q_{y2} и M_{x2} .

$$\Sigma P_y = 0, Q_{y2} - q(l - z_2) = 0, Q_{y2} = q(l - z_2).$$

$$\Sigma M_0 = 0, M_{x2} + q(l - z_2)^2/2 = 0, M_{x2} = -q(l - z_2)^2/2.$$

Так же, как и на первом участке эпюра Q_{y2} меняется по линейному закону, причем угол наклона эпюры Q_y на обоих участках одинаковый. Значения моментов в начале и конце участка следующие: $M_{x2}|_{z_2=0} = -ql^2/2, M_{x2}|_{z_2=l} = 0$.

Исследуем функцию M_{x2} на экстремум. Так как $Q_{y2} = \frac{dM_{x2}}{dz_2} = 0$ при $z_2^* = l$, то $M_{x2 \text{ экстр.}} = M_{x2}|_{z_2=l} = 0$.

Строим эпюру M_{x2} , учитывая, что своей выпуклостью она направлена навстречу действующей распределенной нагрузке, т.е. вверх. При $z_2 = l$ кривая имеет горизонтальную касательную. Таким образом, если экстремальное значение момента возникает на конце участка или вообще отсутствует, эпюру можно построить по двум точкам.

Изогнутая ось балки строится в соответствии с эпурой M_x . Она проходит через неподвижные опоры А и В и имеет точку перегиба в сечении, где момент M_x меняет знак.

Еще раз напомним общие закономерности, присущие опорам поперечных сил и изгибающих моментов.

- 1) Если поперечная сила на участке отсутствует, $M_x = \text{const}$. При $Q_y > 0$ M_x — возрастающая функция, при $Q_y < 0$ M_x — убывающая функция. В сечении, где опора Q_y пересекает ось z , изгибающий момент имеет экстремум.
- 2) В точке приложения сосредоточенной силы на опоре Q_y имеет место разрыв, равный ей по величине. А на опоре M_x — излом, вершиной направленный навстречу силе.
- 3) В месте приложения сосредоточенного момента на опоре M_x возникает разрыв, равный величине этого момента.
- 4) На участке, где приложена равномерно распределенная нагрузка, опора Q_y линейна, а опора M_x — параболическая, направленная своей выпуклостью навстречу этой нагрузке.

3. РАСЧЁТ НА ПРОЧНОСТЬ И ЖЕСТКОСТЬ СТАТИЧЕСКИ ОПРЕДЕЛЛИМЫХ БАЛОК.

Пример 3.1.

Для заданной балки постоянной жесткости EJ_x (рис. 3.1) требуется:

- 1) построить эпюры поперечных сил Q_y и изгибающих моментов M_x ;
- 2) определить размеры поперечного сечения заданной формы, если $P = 1 \text{ кН}$, $l = 1 \text{ м}$, $E = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа}$, $\sigma_{\text{доп}} = \sigma_{\text{ср}} = \sigma_{\text{с}} = 200 \text{ МПа}$ (материал пластичный), $n_p = 2$;
- 3) вычислить вертикальное перемещение сечения К и изобразить примерный вид изогнутой оси балки.

Решение: Определение реакций опор. Предполагаем, что реакции R_A и R_B направлены вверх.
 $\sum M_A = 0, R_B \cdot 2l - 3Pl - P \cdot 3l = 0, R_B = 3P$.
 $\sum M_B = 0, -R_A \cdot 2l - 3Pl - Pl = 0, R_A = -2P$.
 Отрицательный знак R_A указывает на то, что реакция в действительности направлена вниз. Поперечные силы и изгибающие моменты по участкам:

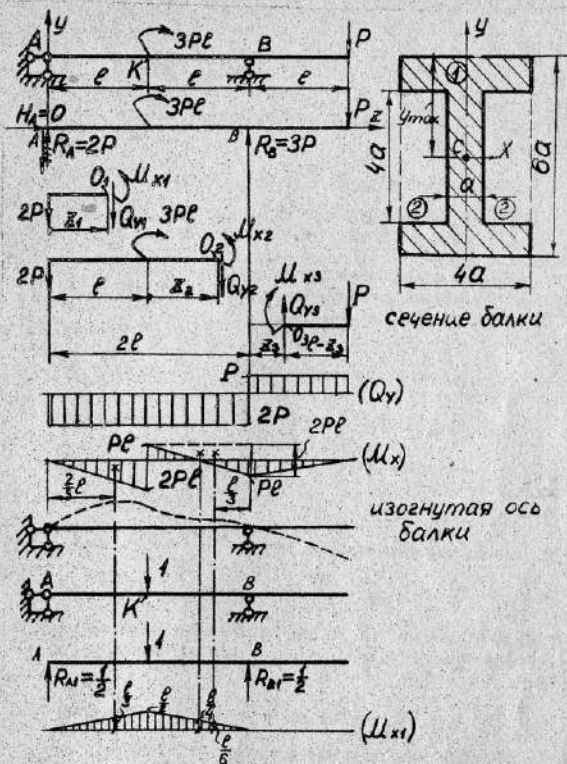


Рис. 3.1

$$0 \leq z_1 \leq l, \Sigma P_y = 0, Q_{y1} = -2P, \Sigma M_{O_1} = 0, M_{x1} = -2Pz_1.$$

$$0 \leq z_2 \leq l, \Sigma P_y = 0, Q_{y2} = -2P, \Sigma M_{O_2} = 0, M_{x2} = Pl - 2Pz_2.$$

$$0 \leq z_3 \leq l, \Sigma P_y = 0, Q_{y3} = P, \Sigma M_{O_3} = 0, M_{x3} = -P(l - z_3).$$

По эпюре M_x определяем абсолютную величину максимального момента $M_{x \max} = 2Pl$.

Определение размеров поперечного сечения.

Из условия прочности $\sigma_{\max} \leq [\sigma]$ получаем зависимость

$$\frac{M_{x \max}}{W_x} \leq \frac{\sigma_r}{n_r}.$$

В этом соотношении искомый размер поперечного сечения a входит в выражение для момента сопротивления изгибу W_x , который определяется по формуле

$$W_x = J_x / y_{\max};$$

где J_x - момент инерции относительно главной центральной оси x ,

$$J_x = J_x^0 - 2J_y^0 = \frac{4a(6a)^3}{12} - 2 \frac{3a(4a)^3}{12} = 56a^4,$$

$y_{\max}$ - расстояние от наиболее удаленной точки сечения до оси x ($y_{\max} = 3a$). Откуда

$$W_x = \frac{56a^4}{3a} = 18,7a^3.$$

Из условия прочности находим a .

$$\frac{2Pl}{18,7a^3} \leq \frac{\sigma_r}{n_r}, \text{ где } \sqrt[3]{\frac{2Pl n_r}{18,7 \sigma_r}} = \sqrt[3]{\frac{2 \cdot 10^3 \cdot 1,2}{18,7 \cdot 10^8}} = 1,03 \cdot 10^{-2} \text{ м} = 10,3 \text{ мм}.$$

Принимаем значение $a = 10$ мм. Получаемая неточность не превышает трех процентов, что допустимо при инженерных расчетах.

Определение вертикального перемещения сечения $K(\delta_K)$.

Величину δ_K определяем по способу Верещагина. Для этого построим эпюру M_{x1} от единичной силы, приложенной

к балке, свободной от заданной нагрузки, в сечении K . Переменным эпюру M_{x1} с эпюрой M_x . Схема расположения эпюр M_{x1} показана прикомными линиями на рис. 3.1. Средняя часть эпюры представлена в виде треугольника высотой $2Pl$ и прямоугольника высотой Pl .

$$\delta_K = \frac{1}{EJ} \left[-\left(\frac{1}{2}Pl\right) \frac{l}{3} + (Pl) \frac{l}{4} - \left(\frac{1}{2}Pl\right) \frac{Pl}{6} \right] = -\frac{Pl^3}{4EJ}.$$

$$\delta_K = -\frac{10^3 \cdot 1^3}{4 \cdot 2 \cdot 10^4 \cdot 56 \cdot 10^{-8}} = 0,224 \cdot 10^{-2} \text{ м}.$$

Сечение K переместилось в направлении, противоположном приложенной единичной силе, т.е. вверх.

Пример 3.2.

Для балки постоянной жесткости EJ_x и заданного сечения (рис. 3.2) требуется:

- 1) построить эпюры поперечных сил Q_y и моментов M_x ,
- 2) определить коэффициент запаса по текучести, если $q = 5 \frac{\text{кН}}{\text{м}}, l = 1 \text{ м}, \sigma_r = \sigma_{cr} = \sigma_t = 250 \text{ МПа}; E = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа}.$
- 3) определить угол поворота сечения K и изобразить примерный вид изогнутой оси балки.

Решение: Определение реакций опор:

$$\Sigma M_A = 0, R_A \cdot 3l - ql^2 - 2ql \cdot 2l = 0, R_A = 5ql/3$$

$$\Sigma M_B = 0, 2ql \cdot l - ql^2 - R_A \cdot 3l = 0, R_A = ql/3.$$

Поперечные силы и изгибающие моменты

$$0 \leq z_1 \leq l, \Sigma P_y = 0, Q_{y1} = ql/3, \Sigma M_{O_1} = 0, M_{x1} = qlz_1/3.$$

$$0 \leq z_2 \leq 2l, \Sigma P_y = 0, Q_{y2} = ql/3 - qz_2,$$

$$\Sigma M_{O_2} = 0, M_{x2} = 4ql^2/3 + qlz_2/3 - qz_2^2/2.$$

Поперечная сила $Q_y = dM_{x2}/dz_2$ обращается в ноль при $z_2 = \frac{l}{3}$, откуда

$$M_{x \max} = M_{x2} \Big|_{z_2 = \frac{l}{3}} = \frac{4}{3}ql^2 - \frac{q}{6} \cdot \frac{l}{3} - \frac{q}{2} \left(\frac{l}{3}\right)^2 = \frac{25}{18}ql^2.$$

Определение коэффициента запаса по текучести.

Коэффициент запаса по текучести n_r определяется из выражения:

$$n_r = \sigma_r / \sigma_{\max},$$

где $\sigma_{\max} = M_{x \max} / W_x$.

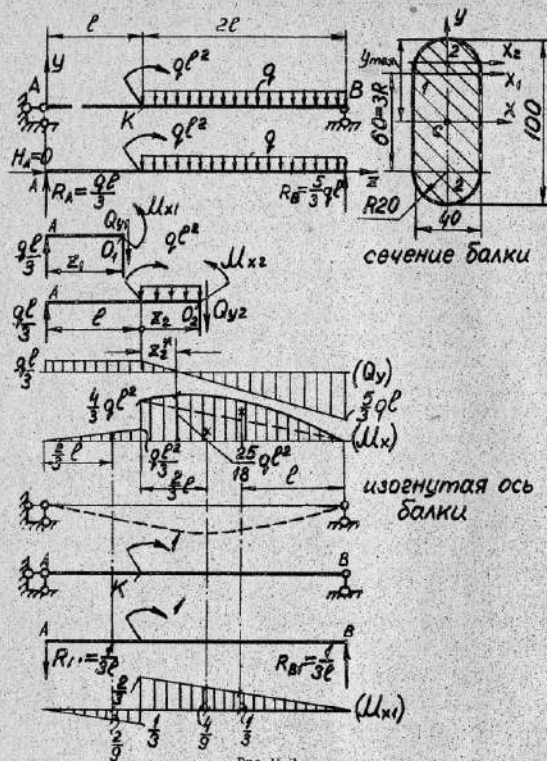


Рис. 8.2

По эпюре моментов M_x находим максимальный момент

$$M_{x \max} = \frac{25}{18} q l^2.$$

Осевой момент сопротивления сечения $W_x = J_x / y_{\max}$ (рис. 3.2).

Осевой момент инерции сечения J_x может быть получен суммированием моментов инерции прямоугольника I высотой $3R = 60 \text{ мм}$ ($J_x^{(1)}$) и двух полукругов высотой 2 ($J_x^{(2)}$). Для последних известен момент инерции относительно оси x_1 ($J_{x_1}^{(2)} = \pi R^4 / 8$). Чтобы перейти от этой оси к главной центральной оси x , необходимо сначала определить момент инерции полукруга относительно его центральной оси x_2 ($J_{x_2}^{(2)}$), расположенной на расстоянии $4R/3\pi$ от оси x_1 :

$$J_{x_2}^{(2)} = \frac{\pi R^4}{8} - \frac{\pi R^2}{2} \left(\frac{4R}{3\pi} \right)^2.$$

Затем можно определить момент инерции полукруга относительно оси x : $J_{x_2}^{(2)} = J_{x_2}^{(2)} + F^{(2)} a^2$, где a — расстояние между осями x_2 и x :

$$a = \frac{4R}{3\pi} + \frac{3}{2}R.$$

Окончательно для всего сечения получаем:

$$J_x = J_x^{(1)} + 2J_{x_2}^{(2)} = \frac{2R(3R)^3}{12} + 2 \left[\frac{\pi R^4}{8} - \frac{\pi R^2}{2} \left(\frac{4R}{3\pi} \right)^2 + \frac{\pi R^2}{2} \left(\frac{4R}{3\pi} + \frac{3}{2}R \right)^2 \right] = 16,35 R^4 = 262 \text{ см}^4.$$

Разделив J_x на $y_{\max} = 5 \text{ см}$ (рис. 3.2) найдем момент сопротивления изгибу:

$$W_x = \frac{J_x}{y_{\max}} = \frac{262}{5} = 52,4 \text{ см}^3.$$

Максимальное напряжение $\sigma_{\max} = M_{x \max} / W_x = \frac{25 q l^2}{18 W_x} = \frac{25 \cdot 5 \cdot 10^3}{18 \cdot 52,4 \cdot 10^6} = 1,33 \cdot 10^6 \text{ Па} = 1,33 \text{ МПа}.$

Коэффициент запаса

$$n_r = \frac{\sigma_r}{\sigma_{\max}} = \frac{250}{1,33} = 1,9.$$

Определение угла поворота сечения K .

К балке, у которой отсутствует внешняя нагрузка, приложим в точке K единичный момент, определим реакции опор и построим эпюру M_{K1} . Перемножив её с эпюрой M_x (рис. 3.2), определим угол поворота θ_K .

$$\theta_K = \frac{1}{EI} \left[\left(\frac{1}{2} \frac{q l^2}{3} \right) \left(\frac{1}{2} \frac{4}{3} q l^2 \right) + \left(\frac{2}{3} \frac{q l^2}{2} \right) \left(\frac{1}{3} \right) \right] = \frac{7}{9} \frac{q l^3}{EI}.$$

$$\theta_K = \frac{7}{8} \cdot \frac{5 \cdot 10^{-3} \cdot 1^3}{2 \cdot 10^{11} \cdot 2,62 \cdot 10^{-4}} = 0,00743 \text{ рад.}$$

Сечения K поворачиваются в направлении единичного момента, т.е. по часовой стрелке.

4. СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМЫЕ БАЛКИ

Статически неопределимой называется система, для которой внешние реакции и внутренние силовые факторы не могут быть найдены при помощи уравнений статического равновесия и метода сечений. Разность между числом неизвестных силовых факторов и числом независимых уравнений равновесия определяет степень статической неопределимости системы. Одним из методов раскрытия статической неопределимости является метод сил. По этому методу заданная система освобождается от дополнительных связей и превращается в статически определимую. Действие отброшенных связей заменяется силовыми факторами, которые затем находятся из условий отсутствия перемещений в направлении каждой из отброшенных связей. Эти условия записываются в виде канонических уравнений.

Пример 4.1.

Для балки постоянной жесткости EJ_K (рис. 4.1) требуется:

- 1) раскрыть статическую неопределимость;
- 2) построить эпюры поперечных сил и изгибающих моментов и изобразить примерный вид изгнутой оси балки;
- 3) определить вертикальное перемещение сечения K ;
- 4) проверить полученное решение.

Решение. Раскрытие статической неопределимости.

На балку наложены четыре связи (три в заделке A и одна в шарнире B). Статическое равновесие в плоскости и кинематическая неизменяемость системы достигается при наличии трех связей. Следовательно, одна связь может считаться дополнительной или "лишней". Она и определяет степень статической неопределимости, которая равна единице. Решение задачи начинается с выбора основной системы, которая получится из заданной путем снятия внешней нагруз-

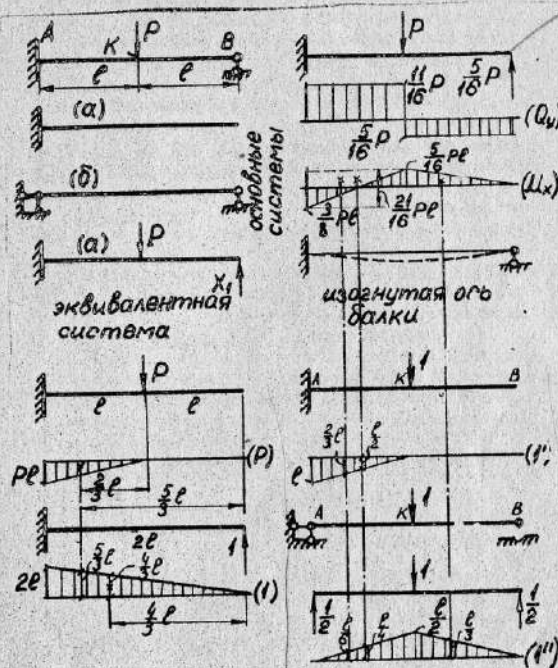


Рис. 4.1

$$2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot \text{рама}$$

$$\delta_{11} = \frac{1}{3} + \frac{1 \cdot e \cdot e}{2} = \frac{2}{3}$$

$$\delta_{1P} =$$

ки и дополнительных связей. Для рассматриваемой балки можно выбрать несколько основных систем, две из которых изображены на рисунке 4.1. Рациональный выбор основной системы может существенно упростить решение задачи.

Основная система с приложенной к ней внешней силой и реакцией отброшенной связи будет эквивалентна заданной статически неопределимой системе при условии равенства нулю перемещения в направлении отброшенной связи. В нашем решении воспользуемся вариантом (а) (рис. 4.1). Условие равенства нулю вертикального перемещения в точке В запишем в виде канонического уравнения метода сил.

$$\delta_{11}X_1 + \delta_{1P} = 0,$$

где δ_{11} — вертикальное перемещение в точке В от единичной силы, приложенной к основной системе вместо реакции X_1 ; δ_{1P} — вертикальное перемещение в этой точке от реакции X_1 ; δ_{1P} — вертикальное перемещение того же сечения от заданной внешней нагрузки.

Для вычисления перемещений δ_{11} и δ_{1P} строим эпюры изгибающих моментов для основной системы первоначально нагруженной только заданной нагрузкой, а затем только единичной силой (рис. 4.1). Перемножив эти эпюры по способу Верещагина, получим

$$\delta_{1P} = \frac{1}{EJ_x} \left[\left(\frac{1}{2} PL \cdot l \right) \frac{2}{3} l \right] = -\frac{5}{6} \frac{Pl^3}{EJ_x},$$

$$\delta_{11} = \frac{1}{EJ_x} \left[\left(\frac{1}{2} 2l \cdot 2l \right) \frac{2}{3} l \right] = \frac{8}{3} \frac{l^3}{EJ_x}.$$

Из канонического уравнения имеем

$$X_1 = -\frac{\delta_{1P}}{\delta_{11}} = \frac{5}{16} P.$$

Статическая неопределимость раскрыта.

Эпюры Q_y и M_x , а также примерный вид изогнутой оси балки строим, придерживаясь правил, рассмотренных в примерах 2.1-2.3.

Определение вертикального перемещения сечения К

Приложим к основной системе в точке К единичную силу в направлении ожидаемого перемещения и построим единичную эпюру (i') (рис. 4.1). Перемножив эпюры (i') и (M_K), получим искомое перемещение.

$$\delta_K = \frac{1}{EJ_x} \left[\left(\frac{5}{16} Pl \cdot l \right) \frac{2}{3} l + \left(\frac{1}{2} \frac{11}{16} Pl \cdot l \right) \frac{2}{3} l \right] = \frac{7}{96} \frac{Pl^3}{EJ_x}.$$

Проверка решения

Проверить полученное решение можно следующими способами:

- 1) решить задачу канонно в другой основной системе;
- 2) определить перемещение, которое заранее известно.

Например, угол поворота в заделке А должен быть равен нулю, или перемещение в точке К, найденное выше, равно.

$7Pl^3/96EJ_x$. Если прогибы в одной и той же точке, определенные с использованием разных основных систем, окажутся равными, то решение можно считать правильным. Остановимся на последнем способе проверки.

Приложим единичную силу в точке К к основной системе (δ') (рис. 4.1), построим эпюру (i'') и умножим её на эпюру (M_K)

$$\delta_K = \frac{1}{EJ_x} \left[\left(\frac{1}{2} \frac{5}{16} Pl \cdot l \right) \frac{2}{3} l + \left(\frac{5}{16} Pl \cdot l \right) \frac{2}{3} l + \left(\frac{1}{2} \frac{11}{16} Pl \cdot l \right) \frac{2}{3} l \right] = \frac{7}{96} \frac{Pl^3}{EJ_x}.$$

Следовательно, задача решена верно.

Пример 4.2.

Для балки постоянной жесткости EJ_x (рис. 4.2) требуется:

- 1) раскрыть статическую неопределимость;
- 2) построить эпюры поперечных сил Q_y и изгибающих моментов M_x и изобразить примерный вид изогнутой оси балки;
- 3) определить угол поворота сечения А;
- 4) вычислить допустимую нагрузку Q_2 , приняв $\sigma_{cr} = \sigma_{tc} = \sigma_r = 300 \text{ МПа}$, $n_r = 2$, $l = 4 \text{ м}$.

Решение: Раскрытие статической неопределимости.

Для многоспорной балки, имеющей одну "лишнюю" связь, наиболее рациональной основной системой является система с шарниром, врезанным над промежуточной опорой В (рис. 4.2), так как в этом случае эпюры получаются более простыми. Тогда сечения, расположенные по обе стороны от шарнира, получают возможность поворачиваться. Так как в заданной системе взаимный угол поворота этих сечений равен нулю, в эквивалентной системе в качестве неизвестных силовых факторов оказываются два одинаковых момента X_1 , расположенные

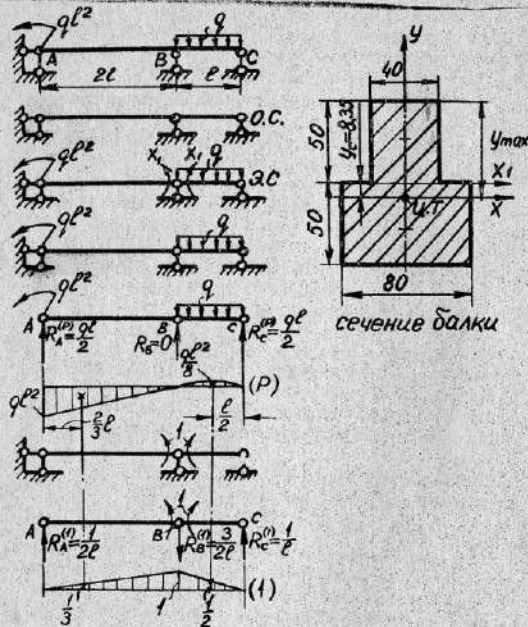


Рис. 4.2

симметрично относительно точки B . Составим каноническое уравнение:

$$\delta_{11} X_1 + \delta_{1p} = 0,$$

где δ_{11} - взаимный угол поворота в шарнире B под действием единичных моментов, приложенных к основной системе вместо X_1 ; δ_{1p} - взаимный угол поворота тех же сечений под действием заданной внешней нагрузки, приложенной к основной системе. Для определения коэффициентов канонического уравнения построим эпюры (P) и (I) . Приложим к основной системе заданную внешнюю нагрузку и определим реакции опор.

Для левого пролета AB

$$\sum M_B = 0, q l^2 - R_A^{(p)} 2l = 0, R_A^{(p)} = \frac{q l^2}{2}.$$

Для правого пролета BC

$$\sum M_A = 0, R_C^{(p)} l - q l \frac{l}{2} = 0, R_C^{(p)} = \frac{q l}{2}.$$

Для всей балки

$$\sum M_A = 0, q l^2 - q l \frac{5l}{2} + \frac{q l}{2} \cdot 3l + R_B^{(p)} 2l = 0, R_B^{(p)} = 0.$$

Правильность определения опорных реакций проверяем с помощью уравнения равновесия

$$\sum P_y = 0, \frac{q l}{2} - q l + \frac{q l}{2} = 0.$$

Чтобы построить эпюру (I) , приложим к основной системе в сечении B единичные моменты и найдем соответствующие реакции опор.

Для левого пролета AB

$$\sum M_B = 0, 1 - R_A^{(i)} 2l = 0, R_A^{(i)} = \frac{1}{2l}.$$

Для правого пролета BC

$$\sum M_A = 0, -1 + R_C^{(i)} l = 0, R_C^{(i)} = \frac{3}{2l}.$$

Для всей балки

$$\sum M_A = 0, \frac{1}{2l} \cdot 3l - R_B^{(i)} 2l = 0, R_B^{(i)} = \frac{3}{2l}.$$

Спроектировав все силы на вертикальную ось y , убедимся, что реакции опор найдены правильно

$$\sum P_y = 0, \frac{1}{2l} + \frac{1}{2l} - \frac{3}{2l} = 0.$$

Эпюры (P) и (I) приведены на рисунке 4.2. Определим коэффициенты канонического уравнения, перемножив эпюры (P) и (I) .

$$\delta_{12} = \frac{1}{EI} \left[-\left(\frac{1}{2} q l^2 \cdot 2l\right) \frac{1}{3} + \left(\frac{2}{3} q l^2 \cdot l\right) \frac{1}{2} \right] = -\frac{7}{24} \frac{q l^3}{EI},$$

$$\delta_{11} = \frac{1}{EI} \left[\left(\frac{1}{2} + 2l\right) \frac{2}{3} + \left(\frac{1}{2} \cdot l\right) \frac{2}{3} \right] = \frac{6}{EI}.$$

Вычисляем неизвестный момент X_1 ,

$$X_1 = -\frac{\delta_{12}}{\delta_{11}} = \frac{7}{24} q l^2.$$

Статическое неопределенность раскрыта.

Эпюры поперечных сил Q_y и изгибающих моментов M_x , изображенные на рисунке 4.3, отстроим после определения реакций опор в эквивалентной системе с учетом найденного значения момента X_1 .

Для левого пролета AB

$$\sum M_B = 0, q l^2 + \frac{7}{24} q l^2 - R_A \cdot 2l = 0, R_A = \frac{31}{48} q l.$$

Для правого пролета BC

$$\sum M_B = 0, R_C \cdot l - \frac{q l^2}{2} - \frac{7}{24} q l^2 = 0, R_C = \frac{19}{24} q l.$$

Для всей балки

$$\sum M_A = 0, q l^2 - q l \cdot \frac{5l}{2} + \frac{19}{24} q l \cdot 3l - R_B \cdot 2l = 0, R_B = \frac{21}{48} q l.$$

Проверяем правильность определения опорных реакций:

$$\sum P_y = 0, \frac{31}{48} q l - \frac{21}{48} q l - q l + \frac{19}{24} q l = 0$$

На участке BC, где приложена распределенная нагрузка, в текущем сечении Z (рис. 4.3) имеем:

$$Q_y = -\frac{19}{24} q l + q z, M_x = \frac{19}{24} q l z - \frac{q z^2}{2}.$$

Координату экстремального значения момента M_x на этом участке определяем из условия

$$dM_x/dz = 0.$$

$$-19ql/24 + qz = 0, z = 19l/24$$

$$M_{x \text{ экстр.}} M_x|_{z=19l/24} = 19ql/24 \cdot 19l/24 - q(19l/24)^2/2 =$$

$$= 361ql^2/1152 = 0,313ql^2.$$

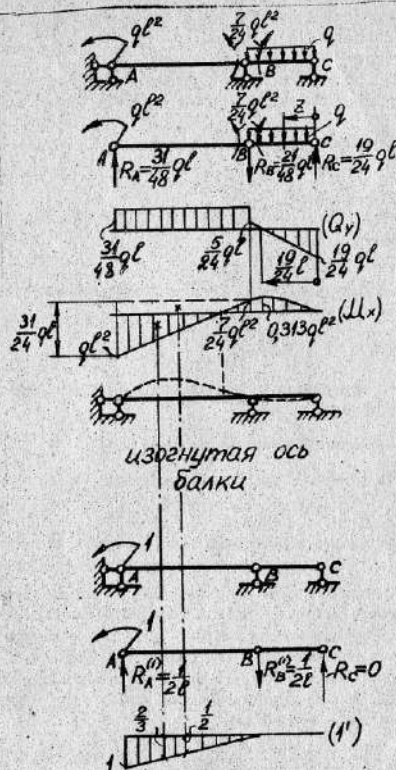


Рис. 4.3

Примерный вид изогнутой оси балки строится в соответствии со знаками эпюры (M_x).

Определение угла поворота сечения A .
К основной системе в точке A приложим единичный момент, после чего определим реакции опор и построим эпюру (M) (рис. 4.3).

Для левого пролета AB

$$\sum M_A = 0, 1 - R_A^{(1)} \cdot 2l = 0, R_A^{(1)} = \frac{1}{2l}.$$

Для правого пролета BC

$$\sum M_B = 0, R_B = 0.$$

Для всей балки

$$\sum M_A = 0, 1 - R_B^{(1)} \cdot 2l = 0, R_B^{(1)} = \frac{1}{2l}.$$

Перемножив эпюры (M_x) и (M), найдем искомым угол поворота

$$\theta_A = \frac{1}{EI} \left[\left(\frac{1}{24} q l^4 \cdot 2l \right)_{AB} + \left(\frac{1}{24} \frac{3}{24} q l^4 \cdot 2l \right)_{BC} \right] = \frac{41}{72} \frac{q l^3}{EI}.$$

Сечение A повернулось в направлении единичного момента, т.е. против часовой стрелки.

Определение допускаемой нагрузки $[q]$.

Условие прочности при изгибе имеет вид

$$\sigma_{max} \leq \frac{\sigma_r}{n_r}, \text{ где } \sigma_{max} = \frac{M_{x,max}}{J_x} y_{max}.$$

Максимальный момент в балке возникает в сечении A ($M_{x,max} = q l^2$). Определим осевой момент инерции сечения J_x и расстояние y_{max} от нейтральной оси до наиболее удаленной точки сечения. Так как поперечное сечение балки (рис. 4.2) имеет одну ось симметрии, необходимо предварительно определить положение его центра тяжести. Для этого, выбрав вспомогательную ось X_1 по линии раздела двух прямоугольников, найдем относительно нее ординату y_c центра тяжести сечения (в сантиметрах).

$$y_c = \frac{S_{x_1}}{F} = \frac{S_{x_1}^{(1)} + S_{x_1}^{(2)}}{F} = \frac{4.5 \cdot 2.5 + 8.5 \cdot (-2.5)}{4.5 + 8.5} = -\frac{5}{6} \text{ см} = -0.835 \text{ см}.$$

Знак (-) указывает на то, что главная центральная ось X расположена ниже оси X_1 . Расстояние y_{max} от оси X до наиболее удаленной точки сечения равно 5,83 см.

Найдем момент инерции J_x относительно оси X :

$$J_x = J_{x_1} - y_c^2 \cdot F = \left(\frac{4.5^3}{3} + \frac{8.5^3}{3} \right) - \left(\frac{5}{6} \right)^2 \cdot 60 = 458,4 \text{ см}^4 = 0,458 \cdot 10^{-5} \text{ м}^4.$$

Для определения $[q]$, запишем условие прочности в следующем виде:

$$\frac{[q] l^2 y_{max}}{J_x} \leq \frac{\sigma_r}{n_r}, \text{ откуда получим}$$

$$[q] \leq \frac{\sigma_r J_x}{l^2 y_{max} n_r} = \frac{300 \cdot 10^6 \cdot 0,458 \cdot 10^{-5}}{1 \cdot 5,83 \cdot 10^{-2} \cdot 2} = 1,18 \cdot 10^4 \frac{\text{Н}}{\text{м}} = 11,8 \frac{\text{кН}}{\text{м}}.$$

Оглавление

Предисловие	8
Обозначения	4
1. Основные понятия и расчетные зависимости ...	5
2. Анализ внутренних силовых факторов при изгибе	11
3. Расчет на прочность и жесткость статически определенных балок	18
4. Статически неопределимые балки	24