

Министерство высшего и среднего специального образования СССР

Московское ордена Ленина, ордена Октябрьской Революции  
и ордена Трудового Красного Знамени  
высшее техническое училище им. Н. Э. Баумана

---

А. Г. АНДРЮЩЕНКО, В. Н. БОЙКОВ

## РАСЧЕТЫ НА ПРОЧНОСТЬ ПРИ СЛОЖНОМ НАПРЯЖЕННОМ СОСТОЯНИИ

Методические указания  
для студентов вечернего факультета  
по курсу «Сопротивление материалов»

Министерство высшего и среднего специального образования СССР  
Московское ордена Ленина, ордена Октябрьской Революции  
и ордена Трудового Красного Знамени  
высшее техническое училище им. Н.Э.Баумана

---

А.Г.Андрющенко, В.Н.Бойков

Утверждены  
редсоветом МВТУ

РАСЧЕТЫ НА ПРОЧНОСТЬ  
ПРИ СЛОЖНОМ НАПРЯЖЕННОМ СОСТОЯНИИ  
Методические указания  
для студентов вечернего факультета  
по курсу "Сопротивление материалов"

Под редакцией А.С.Газаряна

Данные методические указания издаются в соответствии с учебным планом. Рассмотрены и одобрены кафедрой К-5 04.04.86г., методической комиссией факультета К 9.04.86г. и учебно-методическим управлением 6.05.86г.

Рецензент д.т.н. проф. МТИ Стасенко И.В.

© Московское высшее техническое училище им. Н.Э.Баумана

## Отглавление

|                                                                               |   |
|-------------------------------------------------------------------------------|---|
| Предисловие . . . . .                                                         | 8 |
| Обозначения . . . . .                                                         | 3 |
| 1. Сложное напряженное состояние . . . . .                                    | 4 |
| Расчет на прочность . . . . .                                                 | 5 |
| Порядок расчета на прочность при неоднородном напряженном состоянии . . . . . | 7 |
| 2. Примеры расчетов на прочность при сложном напряженном состоянии . . . . .  | 8 |

Редактор В.Т.Карасева

Корректор Л.И.Малюткина

Заказ 235 Объем 2 п.л. (2 уч.-изд.л.)

Тираж 1000 экз.

Бесплатно. Подписано к печати 08.01.87 г. План 1986г., № 93.

Типография МВТУ. 107005, Москва В-5, 2-я Бауманская, 5.

## Предисловие

Методические указания предназначены для студентов вечернего факультета. Они содержат методику и примеры решения задач по теме "Расчеты на прочность при сложных напряженных состояниях".

Для удобства использования изложенного материала при самостоятельной работе студентов над курсом все основные понятия и расчетные зависимости рассматриваемой темы даны в начале пособия. Подбор задач выполнен с учетом вопросов, наиболее часто возникающих у студентов вечернего факультета при изучении данной темы.

Терминология и обозначения, принятые в пособии, соответствуют терминологии и обозначениям учебника, являющегося основным для студентов МВТУ при изучении курса "Сопротивление материалов": Феодосьев В.И. Сопротивление материалов. - М.: Наука, 1983. Общие рекомендации, полезные для решения задач по рассматриваемой теме, изложены также в методических указаниях: Семенов-Ежов И.Е., Шитиков В.Н. Изгиб балок. - М.: МВТУ, 1984.

## Обозначения

- $x, y, z$  - координатные оси ( $z$  - ось стержня);  
 $P$  - сосредоточенная сила, Н;  
 $p$  - давление, Па;  
 $M_x$  - изгибающий момент, действующий относительно оси  $x$ , Н·м;  
 $M_y$  - изгибающий момент, действующий относительно оси  $y$ , Н·м;  
 $M_{кр}$  - крутящий момент, Н·м;  
 $l$  - длина участка стержня, м;  
 $d$  - диаметр круглого поперечного сечения, м;  
 $D$  - средний диаметр тонкостенной оболочки, м;  
 $\delta$  - толщина тонкостенной оболочки, м;  
 $b, h$  - размеры прямоугольного поперечного сечения, м;  
 $F$  - площадь поперечного сечения, м<sup>2</sup>;  
 $\rho_m$  - радиус кривизны оболочки в меридиональном сечении, м;  
 $\rho_t$  - радиус кривизны оболочки в окружном сечении, м;  
 $W_x$  - момент сопротивления изгибу относительно оси  $x$ , м<sup>3</sup>;  
 $W_y$  - момент сопротивления изгибу относительно оси  $y$ , м<sup>3</sup>;  
 $W_k$  - момент сопротивления сечения кручению, м<sup>3</sup>;  
 $\sigma$  - нормальное напряжение, Па;  
 $\tau$  - касательное напряжение, Па;  
 $\sigma_m$  - напряжение, действующее в меридиональном сечении, Па;  
 $\sigma_t$  - напряжение, действующее в окружном сечении, Па;

$\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx}$  - компоненты напряженного состояния в трех произвольных взаимно перпендикулярных площадках точки тела, Па;

$\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  - главные напряжения в точке тела, Па;

$\sigma_{экв}$  - эквивалентное напряжение, Па;

$[\sigma]$  - допускаемое напряжение, Па;

$\sigma_{Tp}$  - предел текучести при растяжении, Па;

$\sigma_{Tc}$  - предел текучести при сжатии, Па;

$\sigma_{\sigma p}$  - предел прочности при растяжении, Па;

$\sigma_{\sigma c}$  - предел прочности при сжатии, Па;

$n_T$  - коэффициент запаса по пределу текучести;

$n_\sigma$  - коэффициент запаса по пределу прочности;

$\gamma_T$  - коэффициент, равный  $\sigma_{Tp} / \sigma_{Tc}$ ;

$\gamma_\sigma$  - коэффициент, равный  $\sigma_{\sigma p} / \sigma_{\sigma c}$ ;

$\beta$  - коэффициент, учитывающий соотношение сторон в прямоугольнике при расчете на прочность при кручении.

## I. Сложное напряженное состояние

Напряженное состояние в точке тела определяется шестью компонентами  $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx}$ , действующими в трех взаимно перпендикулярных площадках. Эти площадки могут быть представлены тремя видимыми гранями элементарного куба, выделенного в окрестности рассматриваемой точки (рис. I.1).

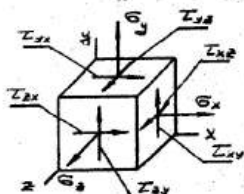


Рис. I.1

Значения компонентов напряженного состояния зависят от ориентации площадок. В каждой точке нагруженного тела существуют три взаимно перпендикулярные площадки, в которых касательные напряжения равны нулю. Такие площадки называют главными, а нормальные напряжения в них - главными напряжениями (рис. I.2).

В большинстве встречающихся в инженерной практике случаев положение одной из главных площадок и нормальное напряжение в ней известны (рис. I.3). Тогда два других главных напряжения определяются по формуле

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}.$$

Эта формула позволяет вычислить главные напряжения путем круговой перестановки индексов и в случае, когда известна главная площадка перпендикулярна оси  $x$  или оси  $y$ .

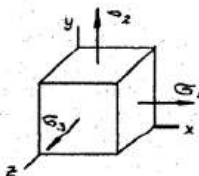


Рис. I.2

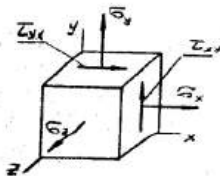


Рис. I.3

Необходимо обратить внимание на то, что в формулу входят только компоненты напряженного состояния в площадках общего положения.

После определения главных напряжений им присваиваются индексы 1, 2, 3 в порядке убывания их алгебраической величины ( $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$ ).

### Расчет на прочность

Для того чтобы получить возможность оценивать прочность при сложном напряженном состоянии по механическим характеристикам при растяжении и сжатии, вводится понятие эквивалентного напряжения  $\sigma_{экв}$ . Эквивалентное напряжение — это напряжение одноосного растяжения, равноопасного, с заданным напряженным состоянием. Условие прочности при неоднoосном напряженном состоянии приобретает вид:

$$\sigma_{экв} \leq [\sigma],$$

где

$$[\sigma] = \frac{\sigma_{1p}}{n_T} \text{ или } [\sigma] = \frac{\sigma_{\delta p}}{n_{\delta}}.$$

Здесь  $n_T$  — коэффициент запаса по пределу текучести;  $n_{\delta}$  — коэффициент запаса по пределу прочности.

Коэффициентом запаса для данного напряженного состояния называется число, показывающее, во сколько раз надо увеличить одновременно все компоненты напряженного состояния, чтобы возникло предельное состояние материала. Под предельным состоянием подразумевается возникновение пластических деформаций в материале или начало разрушения. Два напряженных состояния называются равноопасными, если у них равны коэффициенты запаса.

$\sigma_{экв}$  выражается через  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  с помощью соответствующих критериев пластичности и разрушения:

1. По гипотезе наибольших касательных напряжений (теория Треска-Сен-Венана)

$$\sigma_{экв} = \sigma_1 - \sigma_3.$$

2. По энергетической гипотезе (теория Хубера-Мизеса)

$$\sigma_{\text{экв}} = \sqrt{\frac{1}{2}[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]}.$$

Обе эти гипотезы, построенные на базе критериев пластичности, применимы для пластичных материалов, а вычисленное эквивалентное напряжение должно сопоставляться только с пределом текучести при растяжении, поэтому расчет на прочность ведется по формуле

$$\sigma_{\text{экв}} = \frac{\sigma_{\text{тп}}}{n_{\text{т}}}.$$

Так как под предельным состоянием в этих гипотезах понимается такое напряженное состояние, при котором возникают пластические деформации, обе эти гипотезы неприменимы в тех случаях, когда предельным состоянием является начало разрушения. Например, при трехосном равномерном растяжении.

### 3. По теории Мора

$$\sigma_{\text{экв}} = \sigma_1 - \nu \sigma_3.$$

Эта теория справедлива для обоих предельных состояний.

При определении коэффициента запаса по отношению к пределу текучести (предельное состояние - возникновение пластических деформаций) расчетная формула имеет вид

$$\sigma_{\text{экв}} = \frac{\sigma_{\text{тп}}}{n_{\text{т}}}, \quad \nu_{\text{т}} = \frac{\sigma_{\text{тп}}}{\sigma_{\text{тс}}}.$$

При определении коэффициента запаса по отношению к пределу прочности (предельное состояние - начало разрушения) расчет ведется по формуле

$$\sigma_{\text{экв}} = \frac{\sigma_{\text{пр}}}{n_{\text{б}}}, \quad \nu_{\text{б}} = \frac{\sigma_{\text{пр}}}{\sigma_{\text{бс}}}.$$

Теория Мора применима для пластичных и хрупких материалов и дает наилучшие результаты при напряженных состояниях, у которых главные напряжения имеют разные знаки или одно из них равно нулю.

В инженерной практике часто встречается упрощенное плоское напряженное состояние, при котором одно из двух нормальных напряжений, действующих в неглавных площадках, равно нулю (рис.1.4).

Для этого случая выведены формулы связи эквивалентного напряжения с компонентами напряженного состояния, действующими в неглавных площадках. В зависимости от примененной гипотезы или теории эти формулы имеют вид:

I) по гипотезе наибольших касательных напряжений

$$\sigma_{\text{экв}} = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2};$$

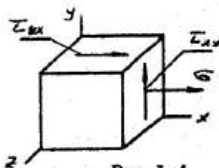


Рис.1.4

2) по энергетической гипотезе

$$\sigma_{ЭКБ} = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2};$$

3) по теории Мора

$$\sigma_{ЭКБ} = \frac{1+\nu}{2} \sigma + \frac{1-\nu}{2} \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}.$$

Порядок расчета на прочность при неоднородном  
напряженном состоянии

В ходе решения должны быть установлены положение опасной точки детали и эквивалентное напряжение  $\sigma_{ЭКБ}$  в ней. Опасной называется точка детали, в которой  $\sigma_{ЭКБ}$  достигает максимального значения.

В инженерной практике положение опасной точки, как правило, находится следующим образом. По эпюрам внутренних силовых факторов определяется положение опасного (т.е. наиболее нагруженного) сечения, в котором расположена опасная точка.

Положение опасного сечения не всегда можно установить сразу, так как внутренние силовые факторы могут составлять различные комбинации. Поэтому сначала намечают для расчета ряд сечений, которые предположительно могут быть опасными. Для каждого из этих расчетных сечений нужно построить эпюры распределения напряжений по поперечному сечению от всех внутренних силовых факторов. По ним наметить точки, в которых компоненты напряженного состояния таковы, что  $\sigma_{ЭКБ}$  может достигнуть наибольшего значения в рассматриваемом сечении. Эти точки будем называть расчетными. Вычисление и сопоставление  $\sigma_{ЭКБ}$  для расчетных точек всех выделенных сечений дает возможность определить опасную точку (т.е. точку, в которой  $\sigma_{ЭКБ}$  максимально).

Для опасной точки составляется условие прочности, из которого можно получить коэффициент запаса или размеры поперечного сечения детали.

В связи с вышеуказанным решение задачи можно разделить на следующие этапы:

1) Провести анализ внутренних силовых факторов и выбрать расчетные сечения.

2) Для каждого из этих сечений построить эпюры распределения напряжений, по которым наметить расчетные точки и изобразить напряженное состояние в них с помощью элементарного куба.

3) Вычислить  $\sigma_{ЭКБ}$  в расчетных точках всех выбранных сечений.

4) Сопоставить  $\sigma_{ЭКБ}$  во всех расчетных точках и определить

опасную точку.

Б) Для опасной точки составить соответствующее условие прочности и из полученного соотношения найти коэффициент запаса детали или размеры ее поперечного сечения.

## 2. Примеры расчетов на прочность при сложном напряженном состоянии

**Пример 2.1.** Для рамы, представленной на рис.2.1, определить из расчета на прочность размеры квадратного поперечного сечения со стороной  $a$  и равнопрочного ему круглого поперечного сечения диаметром  $d$ , если известно, что  $P = 100$  Н,  $\ell = 1$  м,  $\sigma_{TP} = \sigma_{TC} = 200$  МПа,  $n_T = 2$ .

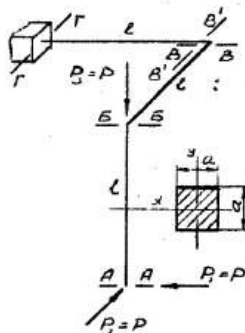


Рис.2.1

**Решение.** При расчете пространственных рам на прочность необходимо прежде всего построить эпюры внутренних силовых факторов —  $M_x$ ,  $M_y$  и  $M_{кр}$ . Эпюры изгибающих моментов строятся на сжатых волокнах стержней в плоскости действия момента, а эпюры крутящих моментов — параллельно осям стержней.

Заданная пространственная рама имеет три участка. Построение эпюр начнем со свободного конца рамы. Мысленно в конце участка AB устанавливаем заделку, в результате чего его можно рассматривать как отдельную консольно закрепленную балку.

Сосредоточенная сила  $P_1$  изгибает балку в плоскости  $zx$ , создавая момент, равный  $M_y = P_1 \cdot z_1$  ( $0 \leq z_1 \leq \ell$ ). Аналогично, сосредоточенная сила  $P_2$  создает изгибающий момент  $M_x = P_2 \cdot z_1$  ( $0 \leq z_1 \leq \ell$ ). Эпюры изгибающих моментов на участке AB показаны на рис.2.2 а.

Для построения эпюр внутренних силовых факторов на участке BC мысленно устанавливаем заделку в сечении B-B, а участок AB отбрасываем. При этом силы и моменты, действовавшие на участке AB, приводим к сечению B-B (рис.2.2 б). Здесь и далее пунктиром изображены отбрасываемые элементы. При этом величины, плоскости действия и направления моментов сохраняются. Момент, действовавший на предыдущем участке в плоскости  $zx$ , на участке BC действует в плоскости  $xy$  и является крутящим, поскольку плоскость его дей-

ствия на этом участке перпендикулярна оси стержня. Момент, действовавший на предыдущем участке в плоскости  $zy$ , на этом участке действует в плоскости  $zy$  и является изгибающим. Величины этих моментов по длине участка остаются постоянными. Сосредоточенная сила  $P_1$ , приложенная к участку БВ, создает изгибающий момент в плоскости  $zx$ , равный  $M_y = P_1 \cdot z_2$  ( $0 \leq z_2 \leq l$ ). Сила  $P_2$  действует вдоль оси участка БВ и момента не создает. А сила  $P_3$  изгибает стержень в плоскости  $zy$  по линейному закону  $M_x = P_3 \cdot z_3 + Pl$  (рис.2.2 в).

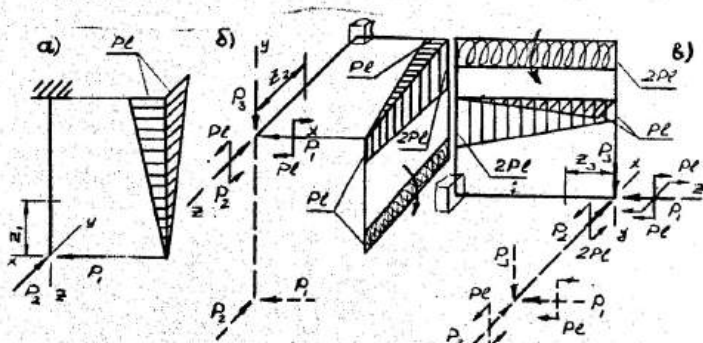


Рис.2.2

Построение эпюр изгибающих и крутящих моментов на участке БГ проводится аналогично. Мысленно устанавливаем заделку в сечении Г-Г, отбрасываем участок БВ, приводим все силы и моменты, действовавшие на отброшенный участок БВ, к сечению В-В. Силы  $P_2$ ,  $P_3$  и моменты, приложенные к этому участку, создают линейно изменяющиеся изгибающие моменты  $M_x = P_3 \cdot z_3 + Pl$  и  $M_y = P_2 \cdot z_3 - Pl$  ( $0 \leq z_3 \leq l$ ) в плоскостях  $zy$  и  $zx$  соответственно (рис.2.2 в). Окончательная эпюра изгибающих и крутящих моментов для рамы представлена на рис.2.3.

Из анализа эпюр следует, что на участке АБ наиболее нагруженным является сечение Б-Б, а на участке БВ - сечение В-В, причем из сравнения их между собой ясно, что сечение В-В нагружено больше, чем сечение Б-Б. Какое из сечений на участке БГ (В-В' или Г-Г) более нагружено, определить по эпюрам внутренних силовых факторов не представляется возможным. Поэтому в качестве расчетных рассмотрим сечения В-В, В-В' и Г-Г.

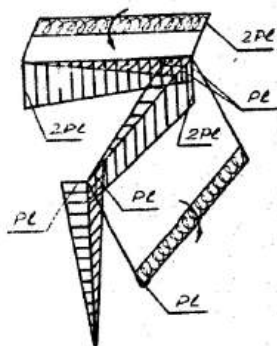


Рис.2.3

Эпюры распределения напряжений по поперечному сечению В-В соответственно от каждого силового фактора и напряженные состояния в точках I, II и III, где напряжения имеют максимальные значения, приведены на рис.2.4.

Напомним, что напряжения при изгибе и кручении стержня определяются соответственно по формулам

$$\sigma_{max} = \frac{M_{max}}{W_x}; \quad \tau_{max} = \frac{M_{кр}}{W_k}.$$

Моменты сопротивления изгибу и кручению для простейших поперечных сечений приведены в таблице. При кручении бруса прямоугольного поперечного сечения напряжение  $\tau_{max}$  возникает посередине длинной стороны, а посередине короткой стороны - напряжение  $\tau_I = \tau_{max}$ , где  $\tau$  - коэффициент, зависящий от соотношения сторон сечения.

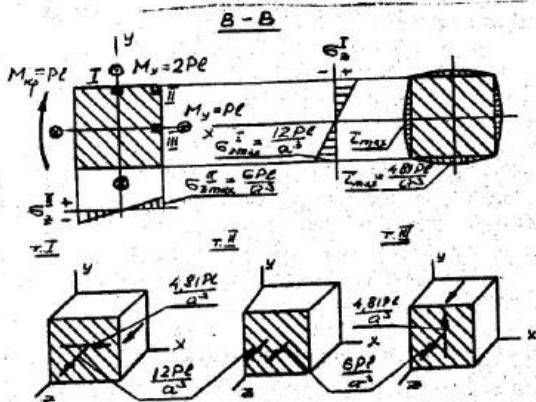


Рис.2.4

Значения наибольших нормальных и касательных напряжений соответственно от  $M_x$ ,  $M_y$  и  $M_{кр}$  равны

$$\sigma_{\tau max}^I = \frac{M_x}{W_x} = \frac{2Pe}{\frac{a^3}{6}} = \frac{12Pe}{a^3}; \quad \sigma_{\tau max}^{II} = \frac{M_y}{W_y} = \frac{2Pe}{\frac{a^3}{6}} = \frac{12Pe}{a^3};$$

$$\tau_{max} = \frac{M_{кр}}{W_k} = \frac{\rho e}{\alpha a^3} = \frac{4,81 \rho e}{a^3} \quad (\alpha = 0,208 \text{ см.таблицу}).$$

|                            |                            |                                  |                                    |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------------|------------------------------------|
|                            |                            |                                  |                                    |
| $W_x = \frac{\pi d^3}{32}$ | $\frac{\pi D^3 \delta}{4}$ | $\frac{1}{6} a^3$                | $\frac{bh^2}{6} = \frac{2}{3} b^3$ |
| $W_y = \frac{\pi d^3}{32}$ | $\frac{\pi D^3 \delta}{4}$ | $\frac{1}{6} a^3$                | $\frac{hb^2}{6} = \frac{1}{3} b^3$ |
| $W_k = \frac{\pi d^3}{16}$ | $\frac{\pi D^3 \delta}{2}$ | $\alpha a^3$<br>$\alpha = 0,208$ | $\alpha hb^2$<br>$\alpha = 0,246$  |

Поскольку в точках I и III возникают однотипные напряженные состояния и касательные напряжения в них одинаковы, а нормальное напряжение в точке I больше, чем в точке III, можно сделать вывод, что точка I опаснее точки III. Для сопоставления напряженных состояний в расчетных точках I и II необходимо определить для них эквивалентные напряжения, используя какую-либо теорию предельных напряженных состояний.

Одно из главных напряжений в точке I известно ( $\sigma_y = 0$ ). Два других главных напряжения подсчитываем по формуле

$$\begin{aligned} \sigma_{1,3} &= \frac{\sigma_{x \max}^I}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_{x \max}^I}{2}\right)^2 + \tau_{max}^2} \\ &= \frac{6 \rho e}{a^3} \pm \sqrt{\left(\frac{6 \rho e}{a^3}\right)^2 + \left(\frac{4,81 \rho e}{a^3}\right)^2} = \frac{6 \rho e}{a^3} \pm \frac{7,69 \rho e}{a^3}. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\sigma_1 = 13,69 \frac{\rho e}{a^3}, \quad \sigma_2 = 0, \quad \sigma_3 = -1,69 \frac{\rho e}{a^3}.$$

Эквивалентные напряжения будем вычислять по гипотезе наибольших касательных напряжений.

Эквивалентное напряжение в точке I равно

$$\sigma_{экв}^I = \sigma_1 - \sigma_3 = 13,69 \frac{\rho e}{a^3} - (-1,69 \frac{\rho e}{a^3}) = 15,4 \frac{\rho e}{a^3}.$$

Заметим, что, поскольку в точке I имеет место упрощенное плоское напряженное состояние, эквивалентное напряжение в ней может

быть подсчитано и по формуле

$$\sigma_{\pi\delta}^I = \sqrt{(\sigma_{\pi\delta\max}^I)^2 + 4(\tau_{\max})^2} = \sqrt{\left(\frac{12\rho\ell}{a^3}\right)^2 + 4\left(\frac{4,81\rho\ell}{a^3}\right)^2} = 15,4 \frac{\rho\ell}{a^3}.$$

В точке II напряженное состояние одноосное, поэтому

$$\sigma_{II}^I = \sigma_{\pi\delta\max}^I + \sigma_{\max}^I = \frac{12\rho\ell}{a^3} + \frac{6\rho\ell}{a^3} = \frac{18\rho\ell}{a^3}.$$

Так как напряженное состояние одноосное,  $\sigma_{II}^I$  можно сравнивать с эквивалентными напряжениями в других точках.

Переходим к расчету сечения В-В. Эпюры распределения напряжений по поперечному сечению и напряженные состояния в точках IУ, У и УI этого сечения представлены на рис.2.5. Наибольшие нормальные и касательные напряжения равны

$$\sigma_{\pi\delta\max}^I = \frac{M_x}{W_x} = \frac{\rho\ell}{\frac{a^3}{6}} = \frac{6\rho\ell}{a^3}; \quad \sigma_{\pi\delta\max}^I = \frac{M_y}{W_y} = \frac{\rho\ell}{\frac{a^3}{6}} = \frac{6\rho\ell}{a^3};$$

$$\tau_{\max}^I = \frac{M_{xy}}{W_{xy}} = \frac{2\rho\ell}{\frac{a^3}{2}} = \frac{4\rho\ell}{a^3}.$$

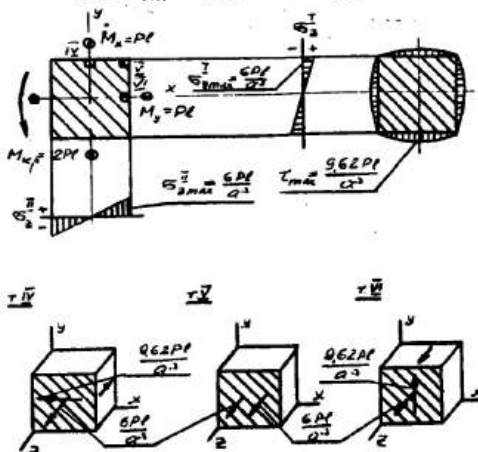


Рис.2.5

В точках IУ и УI имеют место однотипные напряженные состояния и оба компонента напряженного состояния одинаковы по величине, поэтому эти точки равноопасны. Одно из главных напряжений ( $\sigma_y$ ) в точке IУ равно нулю, а два других находим по формуле

$$\sigma_{\text{н}} = \frac{\sigma_{\text{нmax}}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_{\text{нmax}}}{2}\right)^2 + (\tau_{\text{нmax}})^2} = \\ = \frac{300}{a^3} \pm \sqrt{\left(\frac{300}{a^3}\right)^2 + \left(\frac{96200}{a^3}\right)^2} = \frac{300}{a^3} \pm \frac{10100}{a^3}.$$

Отсюда

$$\sigma_1 = \frac{13100}{a^3}, \quad \sigma_2 = 0, \quad \sigma_3 = -\frac{7100}{a^3}.$$

$$\sigma_{\text{экв}} = \sigma_1 - \sigma_3 = \frac{13100}{a^3} - \left(-\frac{7100}{a^3}\right) = \frac{20200}{a^3}.$$

Отметим, что в точке IV, как и в точке I, упрощенное плоское напряженное состояние. Следовательно, и в ней эквивалентное напряжение можно вычислить по формуле

$$\sigma_{\text{экв}} = \sqrt{(\sigma_{\text{нmax}}^I)^2 + 4(\tau_{\text{нmax}})^2} = \sqrt{\left(\frac{600}{a^3}\right)^2 + 4\left(\frac{96200}{a^3}\right)^2} = \frac{20200}{a^3}.$$

В точке V, так же как и в точке II, напряженное состояние одноосное. Поэтому

$$\sigma_1^V = \sigma_{\text{нmax}}^I + \sigma_{\text{нmax}}^{\text{II}} = \frac{600}{a^3} + \frac{600}{a^3} = \frac{1200}{a^3}.$$

Переходим к расчету сечения Г-Г участка ВГ. Эпюры распределения напряжений по поперечному сечению и напряженные состояния в точках УП, УШ и IX этого сечения показаны на рис.2.6. Значения наибольших нормальных и касательных напряжений равны

$$\sigma_{\text{нmax}}^I = \frac{M_x}{W_x} = \frac{200}{6} = \frac{1200}{a^3}; \quad \tau_{\text{нmax}} = \frac{200}{a^3} = \frac{96200}{a^3}.$$

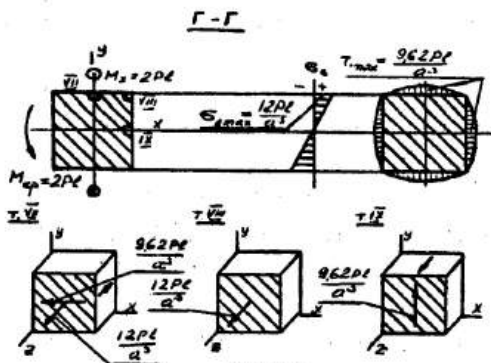


Рис.2.6

Из рис.2.6 видно, что наиболее нагруженной в этом сечении является точка УП. Одно из главных напряжений в ней известно ( $\sigma_y = 0$ ), а два остальных находим по формуле

$$\sigma_{1,3} = \frac{\sigma_{zmax}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_{zmax}}{2}\right)^2 + (\tau_{max})^2} = \\ = \frac{6Pe}{a^3} \pm \sqrt{\left(\frac{6Pe}{a^3}\right)^2 + \left(\frac{962Pe}{a^3}\right)^2} = \frac{6Pe}{a^3} \pm \frac{11,3Pe}{a^3}.$$

Следовательно,

$$\sigma_1 = \frac{17,3Pe}{a^3}; \quad \sigma_2 = 0; \quad \sigma_3 = -\frac{5,3Pe}{a^3}.$$

и

$$\sigma_{\text{экв}} = \sigma_1 - \sigma_3 = \frac{17,3Pe}{a^3} - \left(-\frac{5,3Pe}{a^3}\right) = \frac{22,6Pe}{a^3}.$$

Заметим, что и в этой точке эквивалентное напряжение можно вычислить по формуле

$$\sigma_{\text{экв}}^2 = \sqrt{(\sigma_{zmax})^2 + 4(\tau_{max})^2} = \sqrt{\left(\frac{12Pe}{a^3}\right)^2 + 4\left(\frac{962Pe}{a^3}\right)^2} = \frac{22,6Pe}{a^3},$$

поскольку и в ней имеет место упрощенное плоское напряженное состояние.

Эквивалентное напряжение в точке УП больше, чем в точках I, П, IV и У. Значит, эта точка является опасной и дальнейший расчет ведется по ней.

Из условия прочности  $\sigma_{\text{экв}} \leq [\sigma]$  следует

$$\frac{22,6Pe}{a^3} \leq \frac{\sigma_r}{n_r}, \quad a \geq \sqrt[3]{\frac{22,6Pe \cdot n_r}{\sigma_r}} = \sqrt[3]{\frac{22,6 \cdot 100 \cdot 1,2}{200 \cdot 10^6}} \geq 2,83 \cdot 10^{-2} \text{ м}.$$

Для опасного сечения Г-Г подберем диаметр равнопрочного круглого поперечного сечения. Эпюры распределения напряжений по поперечному сечению и напряженное состояние в точке I приведены на рис.2.7. Значения наибольших нормальных и касательных напряжений в этом случае равны

$$\sigma_{zmax} = \frac{Mx}{Wx} = \frac{2Pe}{\frac{\pi d^3}{32}} = \frac{64Pe}{\pi d^3}; \quad \tau_{max} = \frac{M_{кр}}{W_{кр}} = \frac{2Pe}{\frac{\pi d^3}{16}} = \frac{32Pe}{\pi d^3}.$$

Одно из главных напряжений в точке I известно ( $\sigma_y = 0$ ), а два других находим по формуле

$$\sigma_{1,3} = \frac{\sigma_{zmax}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_{zmax}}{2}\right)^2 + (\tau_{max})^2} = \\ = \frac{32Pe}{\pi d^3} \pm \sqrt{\left(\frac{32Pe}{\pi d^3}\right)^2 + \left(\frac{32Pe}{\pi d^3}\right)^2} = \frac{32Pe}{\pi d^3} (1 \pm \sqrt{2}).$$

Отсюда

$$\sigma_1 = \frac{32Pe}{\pi d^3} (1 + \sqrt{2}); \quad \sigma_2 = 0; \quad \sigma_3 = \frac{32Pe}{\pi d^3} (1 - \sqrt{2}).$$

и

$$\sigma_{\text{экв}}^I = \sigma_1 - \sigma_3 = \frac{64\sqrt{2}Pe}{\pi d^3}.$$

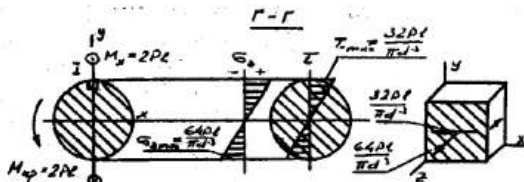


Рис. 2.7

Поскольку в точке I имеет место упрощенное плоское напряженное состояние, эквивалентное напряжение в ней можно подсчитать, как и в предыдущих случаях, без определения главных напряжений по формуле

$$\sigma_{\text{экв}}^I = \sqrt{(\sigma_{\text{max}})^2 + 4(\tau_{\text{max}})^2} = \sqrt{\left(\frac{64Pl}{\pi d^3}\right)^2 + 4\left(\frac{32Pl}{\pi d^3}\right)^2} = \frac{64\sqrt{2}Pl}{\pi d^3}.$$

Диаметр круглого поперечного сечения находим из условия прочности

$$\frac{64\sqrt{2}Pl}{\pi d^3} \leq \frac{\sigma_T}{n_T}, d \geq \sqrt[3]{\frac{64Pl \cdot n_T \sqrt{2}}{\pi \sigma_T}} \geq \sqrt[3]{\frac{64 \cdot \sqrt{2} \cdot 100 \cdot 1.2}{3.14 \cdot 200 \cdot 10^6}} \geq 3.07 \cdot 10^{-2} \text{ м}.$$

Сопоставим квадратное и равнопрочное ему круглое поперечное сечения по металлоемкости проектируемой конструкции. Металлоемкость пропорциональна площади поперечного сечения. Вычислим площадь квадратного и круглого сечений

$$F_{\text{кв}} = a^2 = 8.01 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2, F_{\text{кр}} = \frac{\pi d^2}{4} = 7.40 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2.$$

Площадь круглого поперечного сечения меньше, поэтому для снижения металлоемкости в рассматриваемой раме рационально применить круглое сечение.

**Примечание.** Расчеты проводятся с точностью до третьей значащей цифры, а коэффициент запаса определяется с точностью до второй значащей цифры.

**Пример 2.2.** Провести проверочный расчет на прочность рамы прямоугольного поперечного сечения (рис. 2.8), если известно, что  $P = 100 \text{ Н}$ ,  $l = 1 \text{ м}$ ,  $b = 0.02 \text{ м}$ ,  $h = 0.04 \text{ м}$ ,  $\sigma_{Tp} = \sigma_{Tc} = 250 \text{ МПа}$ . Расчет провести по энергетической теории.

**Решение.** Эпюры внутренних силовых факторов, возникающих от каждой силы и их совместного действия (рис. 2.9), построены согласно методике, изложенной в примере 2.1.

По эпюрам изгибающих и крутящих моментов находим наиболее нагруженное сечение. Для этого на каждом участке рамы определяем наиболее нагруженное сечение и сравниваем их между собой. По эпю-

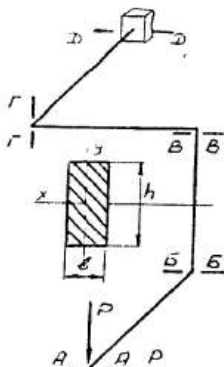


Рис. 2.6

рам видно, что на первом участке АБ наиболее нагруженным является сечение ББ, на втором – ВВ, на третьем – ГГ, на четвертом – ДД. Из сравнения ясно также, что наиболее нагруженным, т.е. опасным, является сечение ДД, так как в нем действуют наибольшие по величине моменты.

Затем в опасном сечении определяем наиболее нагруженную точку. Для этого строим эпюры распределения напряжений по поперечному сечению от каждого из моментов (рис. 2.10). Значения наибольших нормальных и касательных напряжений на эпюрах равны

$$\sigma_{\max}^I = \frac{M_x}{W_x} = \frac{2Pe}{\frac{1}{3}b^3} = \frac{3Pe}{b^3},$$

$$\sigma_{\max}^{II} = \frac{M_y}{W_y} = \frac{2Pe}{\frac{1}{3}b^3} = \frac{6Pe}{b^3}, \quad \tau_{\max} = \frac{M_{xy}}{W_{xy}} = \frac{2Pe}{0,246 \cdot 2b \cdot b^2} = \frac{4,04Pe}{b^3}.$$

Наметим расчетные точки. В общем случае в прямоугольном поперечном сечении расчетными являются точки I, II и III в квадранте растяжения. Напряженные состояния в них показаны на рис. 2.10. Однако, так как в точках I и III в данном случае возникают упрощенные плоские напряженные состояния и оба компонента напряженного состояния в точке III больше, чем в точке I, можно сделать вывод, что точка III более нагружена.

Эквивалентное напряжение в точке III, поскольку в ней имеет место упрощенное плоское напряженное состояние, можно подсчитать по формуле

$$\sigma_{\text{экв}}^{III} = \sqrt{(\sigma_{\max}^{II})^2 + 3(\tau_{\max})^2} = \sqrt{\left(\frac{6Pe}{b^3}\right)^2 + 3\left(\frac{4,04Pe}{b^3}\right)^2} = \frac{9,26Pe}{b^3}.$$

В точке II напряженное состояние одноосное, поэтому

$$\sigma_{\max}^I = \sigma_{\max}^{II} = \sigma_{\max}^I = \frac{3Pe}{b^3} + \frac{6Pe}{b^3} = \frac{9Pe}{b^3}.$$

Эквивалентное напряжение в точке III больше, чем напряжение в точке II, значит, она и является опасной.

Коэффициент запаса по отношению к пределу текучести будет равен

$$n_T = \frac{\sigma_{Tp}}{\sigma_{\text{экв}}^{III}} = \frac{\sigma_{Tp}}{9,26Pe} = \frac{250 \cdot 10^6 \cdot (0,02)^3}{9,26 \cdot 100 \cdot 1} = 2,16.$$

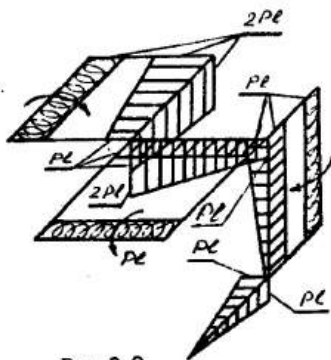
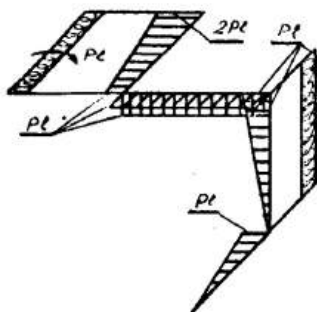
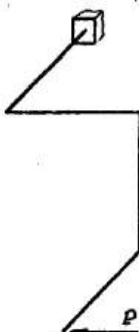
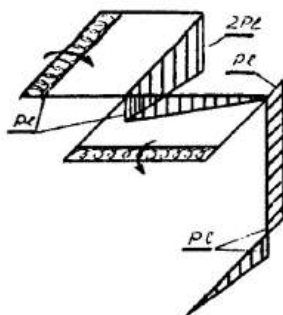
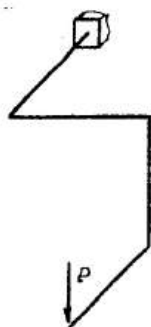


Рис.2.9

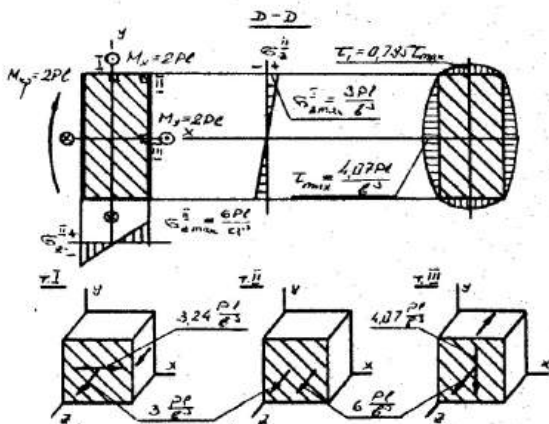


Рис. 2.10

**Пример 2.3.** Провести поворочный расчет на прочность тонкостенной трубки с открытыми торцами, находящейся в камере с давлением  $p$  и нагруженной изгибающими моментами  $M$  (рис. 2.11), если дано:  $M = 12,6 \text{ Н м}$ ,  $p = 200 \text{ МПа}$ ,  $D = 20 \text{ мм}$ ,  $\delta = 1 \text{ мм}$ ,  $\sigma_{rp} = 600 \text{ МПа}$ ,  $\sigma_{rc} = 800 \text{ МПа}$ .

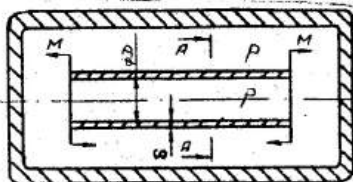


Рис. 2.11

**Решение.** Зоны, прилегающие к торцам трубки, исключаются из рассмотрения в соответствии с принципом Сен-Венана. Принцип Сен-Венана гласит, что в местах приложения сосредоточенных силовых факторов и в местах резкого изменения формы и размеров поперечных сечений возникают возмущения полей напряжений (местные напряжения), которые быстро затухают по мере удаления от этих мест. Поэтому на расстояниях, превышающих характерный размер сечения, уже можно рассматривать только равнодействующие внешних сил.

Следовательно, расчетная часть трубки находится между зонами, прилегающими к торцам. Длина этих зон примерно равна диаметру  $D$ .

Все сечения расчетной части трубки нагружены одинаково и, следовательно, являются равноопасными.

Расчет опасного сечения AA, изображенного на рис.2.12, проводится следующим образом. Применяя принцип независимости действия сил, рассмотрим сначала напряженное состояние точек сечения, создаваемое только давлением в камере, постоянным по всему ее объему. От давления во всех точках тела любой формы возникает трехосное сжатие. При этом все площадки, независимо от их ориентации, главные, а главные напряжения в них равны.

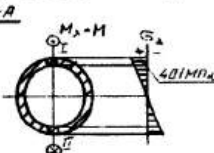


Рис.2.12

Рассматривая затем напряженные состояния точек сечения, создаваемые изгибающими моментами, строим эпюру распределения напряжений (рис.2.12) и намечаем расчетные точки I и II, в которых от изгиба возникают наибольшие растягивающие и сжимающие напряжения

$$\sigma_{2max} = \frac{Mx}{W_x} = \frac{4Mx}{\pi D^2 \delta} = \frac{4 \cdot 126}{\pi (0.02)^2 \cdot 1 \cdot 10^{-3}} = 401 \text{ МПа}$$

Напряженные состояния в точках I и II, с учетом  $p$  и  $M$ , представлены на рис.2.13. Все площадки в обоих элементарных параллелепипедах являются главными.

Определяем эквивалентное напряжение в точке I. Главные напряжения в ней равны  $\sigma_1^I, \sigma_2^I$ :

$$\sigma_{2max} - p = 401 - 200 = 201 \text{ МПа};$$

$$\sigma_2^I \cdot \sigma_3^I = \sigma_x^I \cdot \sigma_y^I = -p = -200 \text{ МПа}.$$

Эквивалентное напряжение вычисляем по теории Мора, так как материал трубки неодинаково сопротивляется растяжению и сжатию

$$\sigma_{экв}^I = \sigma_1 - \sigma_3 = \sigma_1 - \frac{\sigma_1 \sigma_3}{\sigma_c} = 201 - \frac{600}{800} (-200) = 351 \text{ МПа}.$$

Переходим к исследованию напряженного состояния в точке II. Главные напряжения в точке II равны

$$\sigma_1^{II} \cdot \sigma_2^{II} = \sigma_x^{II} \cdot \sigma_y^{II} = -p = -200 \text{ МПа},$$

$$\sigma_3^{II} = \sigma_2 - \sigma_{2max} - p = 401 - 200 = -601 \text{ МПа}.$$

В точке II трехосное сжатие, и для нее теория Мора неприменима. Следовательно, эквивалентное напряжение в точке II вычислить нельзя. Однако, как показывают эксперименты, трехосное сжатие такого типа

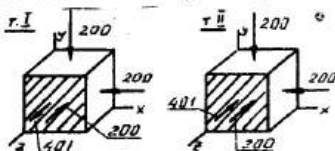


Рис.2.13

менее опасно, чем смешанное напряженное состояние в точке I. Поэтому опасной является точка I и коэффициент запаса трубы по отношению к пределу прочности

$$n_{\sigma} = \frac{\sigma_{\text{вр}}}{\sigma_{\text{эпб}}} = \frac{600}{351} = 1,7.$$

Иллюстрация напряженного состояния в точке I круговой диаграммой напряжений Мора приведена на рис.2.14.

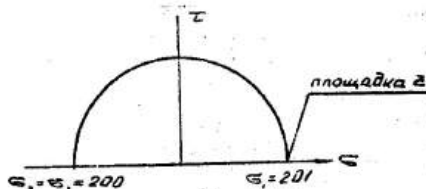


Рис.2.14

**Пример 2.4.** Произвести проекторочный расчет тонкостенного сферического сосуда (рис.2.15), который находится в камере с давлением  $p_2$  и подвержен действию внутреннего давления  $p_1$ . Дано:

$$p_1 = 210 \text{ МПа}, p_2 = 200 \text{ МПа}, D = 100 \text{ мм}, \sigma_{\text{тр}} = \sigma_{\text{тс}} = 500 \text{ МПа}, n_T = 2.$$

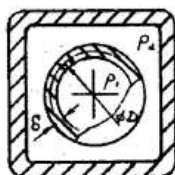


Рис.2.15

**Решение.** Рассматриваемый сосуд представляет собой тонкостенную сферическую оболочку, для которой требуется определить толщину  $\delta$ .

Расчет тонкостенных осесимметричных оболочек, подверженных действию только одного внутреннего или внешнего давления, проводится с помощью уравнения Лапласа

$$\frac{\sigma_m}{\rho_m} + \frac{\sigma_t}{\rho_t} = \frac{p}{\delta}.$$

Здесь  $\sigma_m$  и  $\sigma_t$  - напряжения в меридиональном и окружном сечениях соответственно;  $\rho_m$  и  $\rho_t$  - радиусы кривизны меридионального и окружного сечений соответственно;  $\delta$  - толщина оболочки.

Уравнение Лапласа дополняется уравнением равновесия части оболочки, выделенной окружным сечением.

В соответствии с безмоментной теорией, напряжением, действующим нормально к срединной поверхности оболочки, пренебрегаем.

Напряжения в сферической оболочке определяются выражением

$$\sigma_m = \sigma_t = \frac{pD}{4\delta}.$$

Однако соотношения безмоментной теории неприменимы к оболоч-

кам, подверженным одновременному действию внутреннего и наружного давлений. Поэтому необходимо преобразовать расчетную схему заданной сферической оболочки, опираясь на принцип независимости действия сил (рис.2.16). При этом формируются две новые расчетные схемы, в первой из которых рассматривается сосуд, подверженный действию только внутреннего давления, равного разности  $(p_1 - p_2)$ , а во второй – сосуд, находящийся под действием внутреннего и наружного давлений, равных  $p_2$ . Наложение этих двух задач дает заданную расчетную схему.

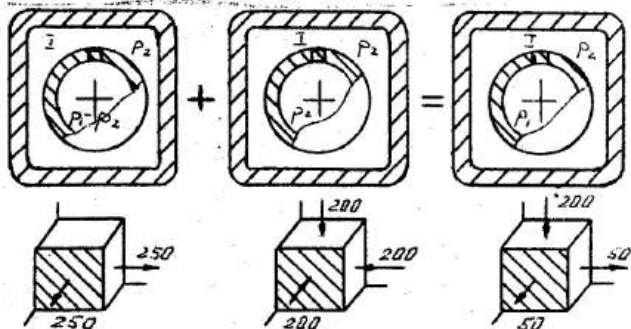


Рис.2.16

В первом случае к сосуду применимо уравнение Лапласа, в соответствии с которым

$$\sigma_m = \sigma_c = \frac{(p_1 - p_2)D}{4\delta}$$

Во втором случае напряженное состояние всех точек оболочки представляет собой трехосное равномерное сжатие, при котором все компоненты напряженного состояния равны  $(-p_2)$ . Элементарные кубы с изображением напряженного состояния в верхней точке сосуда показаны под соответствующими расчетными схемами. Эта точка выбрана для иллюстрации напряженного состояния только ввиду простоты изображения. Для всех рассматриваемых случаев нагружения сосуда напряженное состояние является однородным.

Суммируя напряжения, действующие в соответствующих площадках, получаем результирующее напряженное состояние для точек заданной оболочки.

Главные напряжения равны

$$\sigma_1 = \sigma_2 = \frac{(p_1 - p_2)D}{4\delta} - p_2, \quad \sigma_3 = -p_2$$

Так как материал оболочки пластичный ( $\sigma_{\Gamma\rho} = \sigma_{\Gamma\sigma}$ ), то эквивалентное напряжение можно определить и по теории наибольших касательных напряжений, и по энергетической теории. В данной задаче обе теории дают одинаковый результат.

Эквивалентное напряжение сначала определим по энергетической теории

$$\begin{aligned}\sigma_{\text{экв}} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{0 + \left\{ \left[ \frac{(\rho_1 - \rho_2)D}{4\delta} - \rho_2 \right] - (-\rho_2) \right\}^2 + \left\{ (-\rho_2) - \left[ \frac{(\rho_1 - \rho_2)D}{4\delta} - \rho_2 \right] \right\}^2} = \frac{(\rho_1 - \rho_2)D}{4\delta}.\end{aligned}$$

По теории наибольших касательных напряжений

$$\sigma_{\text{экв}} = \sigma_1 - \sigma_3 = \left[ \frac{(\rho_1 - \rho_2)D}{4\delta} - \rho_2 \right] - (-\rho_2) = \frac{(\rho_1 - \rho_2)D}{4\delta}.$$

Из условия прочности имеем

$$\sigma_{\text{экв}} = [\sigma], \quad \text{где } [\sigma] = \frac{\sigma_{\Gamma\rho}}{n_T}.$$

Подставляя значение  $\sigma_{\text{экв}}$ , получаем

$$\frac{(\rho_1 - \rho_2)D}{4\delta} = \frac{\sigma_{\Gamma\rho}}{n_T}.$$

Из этого уравнения следует

$$\delta = \frac{(\rho_1 - \rho_2)D n_T}{4\sigma_{\Gamma\rho}} = \frac{(210 - 200) \cdot 10 \cdot 0,1 \cdot 2}{4 \cdot 500 \cdot 10^6} = 10^{-3} \text{ м} = 1 \text{ мм}.$$

Рекомендуемая толщина стенки сосуда  $\delta = 1 \text{ мм}$ .

**Пример 2.5.** Тонкостенная трубка, нагруженная изгибающими и крутящими моментами, проходит через камеру, в которой поддерживается давление  $p$  (рис. 2.17). Конструкция уплотнений такова, что они не оказывают влияния на напряженно-деформированное состояние трубки. Исследовать напряженное состояние и провести поверочный расчет трубки на некотором удалении от торцов и уплотнений камеры. Дано:  $p = 10 \text{ МПа}$ ,  $M = 4,0 \text{ Н м}$ ,  $D = 10 \text{ мм}$ ,  $\delta = 1,0 \text{ мм}$ ,  $\sigma_{\Gamma\rho} = 240 \text{ МПа}$ ,  $\sigma_{\Gamma\sigma} = 600 \text{ МПа}$ .

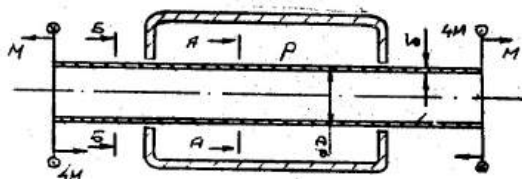


Рис. 2.17

**Решение.** В заданной системе необходимо рассмотреть участок трубки, находящийся в камере, и участки, находящиеся вне камеры. На каждом из этих участков внутренние силовые факторы постоянны. Так как участки, расположенные за пределами камеры, находятся в одинаковых условиях, для расчета намечаем два сечения А-А и Б-Б, соответственно внутри камеры и за ее пределами (рис.2.18 и 2.20).

Рассмотрим напряжения, возникающие в точках этих сечений, от каждого силового фактора в отдельности. Касательные напряжения от крутящего момента во всех точках обоих сечений одинаковы и равны  $\tau = \frac{M_{кр}}{W_k} = \frac{2 \cdot 4 \text{ М}}{\pi D^2 \delta} = \frac{8 \cdot 4}{\pi \cdot 10^3 \cdot 10^{-3}} = 102 \text{ МПа}$ .

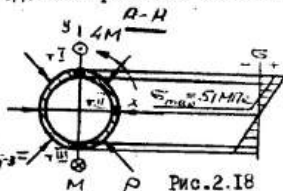


Рис.2.18

Наибольшие нормальные напряжения от изгибающего момента в обоих сечениях возникают в точках, наиболее удаленных от оси  $x$  (эпюры  $\sigma$  даны на рис.2.18 и 2.20), и равны  $\sigma = \frac{M_{из}}{W_x} = \frac{4 \text{ М}}{\pi D^2 \delta} = \frac{4 \cdot 4}{\pi \cdot 10^3 \cdot 10^{-3}} = 51 \text{ МПа}$ .

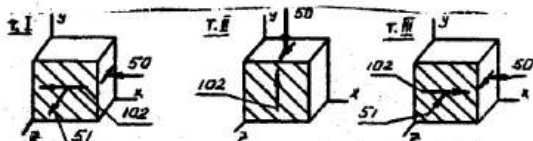


Рис.2.19

От давления  $p$  напряжения возникают только в сечении А-А, во всех точках которого окружные напряжения определяются по формуле

$$\sigma_r = \frac{pD}{2\delta} = \frac{10 \cdot 10}{2 \cdot 10} = 50 \text{ МПа}.$$

Меридиональные напряжения здесь не возникают, так как на торцы трубки не действует избыточное давление. Напомним также, что напряжения, действующие нормально к поверхности оболочки, пренебрегаем.

Анализируя распределение напряжений по сечениям А-А и Б-Б, находим, что в качестве расчетных должны быть рассмотрены точки I, II, III, IV, V, VI, напряженное состояние в которых показано на рис.2.19 и 2.21.

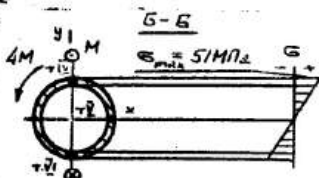


Рис.2.20

Исследуем напряженное состояние и определим эквивалентное напряжение в точке I. Главное напряжение в площадке, перпендикуляр-

ной оси  $y$ , равно нулю ( $\sigma_{y1} = \sigma_y = 0$ ). Два других главных напряжения определяются по формуле

$$\begin{aligned}\sigma_{1,3} &= \frac{\sigma_z + \sigma_x}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_z - \sigma_x}{2}\right)^2 + \tau^2} = \\ &= \frac{51 - 50}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{51 + 50}{2}\right)^2 + (102)^2} = 0,5 \pm 113.\end{aligned}$$

Окончательно получаем

$$\sigma_1 = 113,5 \text{ МПа}; \quad \sigma_2 = 0; \quad \sigma_3 = -112,5 \text{ МПа}.$$

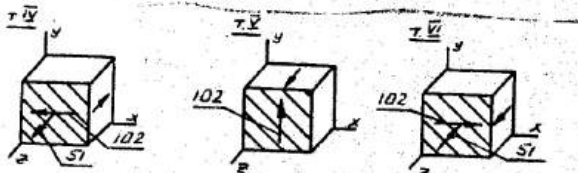


Рис. 2.21

Определяем эквивалентное напряжение по теории Мора, так как материал неодинаково сопротивляется растяжению и сжатию:

$$\sigma_{экв}^I = \sigma_1 - \nu_T \sigma_3 = \sigma_1 - \frac{\sigma_{1p}}{\sigma_{1c}} \sigma_3 = 113,5 - \frac{240}{600} (-112,5) = 158 \text{ МПа}.$$

Определяем главные напряжения в точке II

$$\sigma_{y1} = \sigma_x = 0;$$

$$\sigma_{1,3} = \frac{\sigma_y + \sigma_z}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_y - \sigma_z}{2}\right)^2 + \tau^2} = \frac{-50 + 0}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{-50 - 0}{2}\right)^2 + (102)^2} =$$

$$= -25 \pm 105; \quad \sigma_1 = 80 \text{ МПа}; \quad \sigma_2 = 0; \quad \sigma_3 = -130 \text{ МПа}.$$

Эквивалентное напряжение в этой точке

$$\sigma_{экв}^{II} = \sigma_1 - \nu_T \sigma_3 = 80 - \frac{240}{600} (-130) = 132 \text{ МПа}.$$

Определяем главные напряжения в точке III

$$\sigma_{y1} = \sigma_y = 0;$$

$$\sigma_{1,3} = \frac{\sigma_z + \sigma_x}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_z - \sigma_x}{2}\right)^2 + \tau^2} = \frac{-51 - 50}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{-51 + 50}{2}\right)^2 + (102)^2} =$$

$$= -50,5 \pm 102; \quad \sigma_1 = 51,5 \text{ МПа}; \quad \sigma_2 = 0; \quad \sigma_3 = -152,5 \text{ МПа}.$$

Эквивалентное напряжение в этой точке

$$\sigma_{экв}^{III} = \sigma_1 - \nu_T \sigma_3 = 51,5 - \frac{240}{600} (-152,5) = 112 \text{ МПа}.$$

Определяем главные напряжения в точке IV

$$\sigma_{\text{гЛ}} = \sigma_y = 0;$$

$$\sigma_{\text{гЛ}} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau^2} = \frac{51+0}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{51-0}{2}\right)^2 + (102)^2} =$$

$$= 25,5 \pm 105; \quad \sigma_1 = 130,5 \text{ МПа}; \quad \sigma_2 = 0; \quad \sigma_3 = -79,5 \text{ МПа}.$$

Эквивалентное напряжение в точке IV

$$\sigma_{\text{экв}}^{\text{IV}} = \sigma_1 - \sqrt{\sigma_1 \sigma_3} = 130,5 - \sqrt{130,5 \cdot (-79,5)} = 162 \text{ МПа}.$$

Заметим, что в точках II, IV, V, VI - упрощенное плоское напряженное состояние, при котором эквивалентное напряжение может быть определено по формуле

$$\sigma_{\text{экв}} = \frac{1+\nu_T}{2} \sigma + \frac{1-\nu_T}{2} \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}.$$

Анализ этой формулы показывает, что эквивалентное напряжение в точках V и VI меньше, чем в точке IV.

Следовательно, опасной является точка IV и коэффициент запаса трубы по отношению к пределу текучести равен

$$n_T = \frac{\sigma_{\text{гП}}}{\sigma_{\text{экв}}^{\text{IV}}} = \frac{240}{162} = 1,5.$$

Проиллюстрируем круговой диаграммой напряжений Мора, представленной на рис.2.22, напряженное состояние в опасной точке.

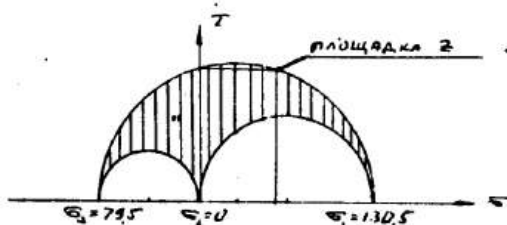


Рис.2.22

**Пример 2.6.** Тонкостенный цилиндрический сосуд заполнен газом под давлением  $p$  и подвергается действию крутящего момента  $M$  и растягивающей силы  $P$  (рис.2.23). Произвести поверочный расчет цилиндрической стенки сосуда на некотором удалении от дна, если дано:  $p = 15 \text{ МПа}$ ,  $P = 12,6 \text{ кН}$ ,  $M = 1000 \text{ Н·м}$ ,  $D = 40 \text{ мм}$ ,  $\delta = 2 \text{ мм}$ ,  $\sigma_{\text{гП}} = \sigma_{\text{гс}} = 600 \text{ МПа}$ .

**Решение.** Все сечения расчетной части сосуда являются равно-

опасными, а напряженное состояние во всех точках сечения одинаково, так как заданная система осесимметрична. На рис.2.24 изображено сечения А-А и напряженное состояние в опасной точке I. Компоненты напряженного состояния определим, базирываясь на принципе независимости действия сил. От внутреннего давления возникают меридиональное  $\sigma_m$  и окружное  $\sigma_t$  напряжения, которые определяются по формулам

$$\sigma_m = \frac{pD}{4\delta} = \frac{15 \cdot 40}{4 \cdot 2} = 75 \text{ МПа}; \quad \sigma_t = \frac{pD}{2\delta} = \frac{15 \cdot 40}{2 \cdot 2} = 150 \text{ МПа}.$$

Крутящий момент вызывает касательные напряжения  $\tau$ , которые равны

$$\tau = \frac{M}{W_K} = \frac{2M}{\pi D^2 \delta} = \frac{2 \cdot 1000}{\pi (0,04)^2 \cdot 0,002} = 199 \text{ МПа}.$$

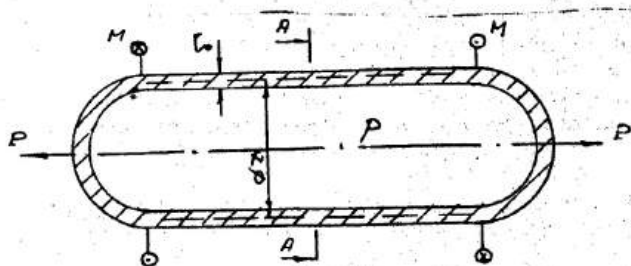


Рис.2.23

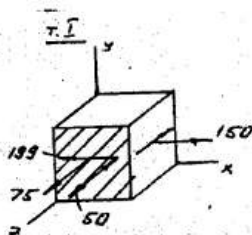
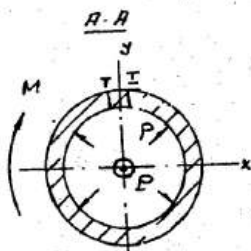


Рис.2.24

Растягивающая сила создает нормальное напряжение  $\sigma$ , действующее в осевом направлении,

$$\sigma = \frac{p}{\pi D \delta} = \frac{12,6 \cdot 10^3}{\pi \cdot 0,04 \cdot 0,002} = 50 \text{ МПа}.$$

В площадке, перпендикулярной оси  $z$ , напряжения  $\sigma_m$  и  $\sigma$  складываются:

$$\sigma_z = \sigma_m + \sigma = 25 + 50 = 125 \text{ МПа}.$$

Радиальным давлением на внутреннюю поверхность цилиндрической оболочки пренебрегаем, т.е.  $\sigma_y = 0$ .

Главные напряжения определяются по соотношению

$$\sigma_{\text{гл}} = \frac{\sigma_z + \sigma_x}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_z - \sigma_x}{2}\right)^2 + \tau^2} = \frac{125 + 150}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{125 - 150}{2}\right)^2 + (199)^2} = 138 \pm 199.$$

Учитывая, что  $\sigma_{\text{гл}} = \sigma_y = 0$ , окончательно записываем главные напряжения в виде

$$\sigma_1 = 337 \text{ МПа}; \quad \sigma_2 = 0; \quad \sigma_3 = -61 \text{ МПа}.$$

Эквивалентное напряжение определяем по энергетической теории

$$\sigma_{\text{экв}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(337 - 0)^2 + (0 - (-61))^2 + (-61 - 337)^2} = 314 \text{ МПа}.$$

Коэффициент запаса по пределу текучести равен

$$n_T = \frac{\sigma_{\text{гд}}}{\sigma_{\text{гс}}} = \frac{600}{314} = 1,6.$$

Круговая диаграмма напряжений Мора для данного напряженного состояния в точке I изображена на рис.2.25.

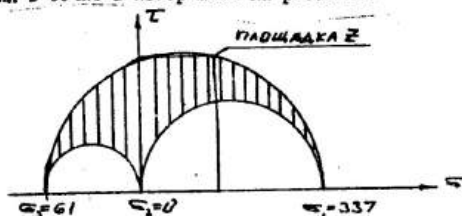


Рис.2.25

**Пример 2.7.** Замкнутый тонкостенный цилиндр, внутри которого поддерживается атмосферное давление, расположен в камере, заполненной газом под давлением  $p$ , и нагружен силами  $P$ , действующими в вертикальной меридиональной плоскости, как показано на рис.2.26. Произвести поверочный расчет цилиндрической стенки сосуда на не-котором удалении от дна, если дано:  $p = 5 \text{ МПа}$ ,  $P = 4,4 \text{ кН}$ ,  $D = 20 \text{ мм}$ ,  $\delta = 1 \text{ мм}$ ,  $\sigma_{\text{гд}} = \sigma_{\text{гс}} = 300 \text{ МПа}$ .

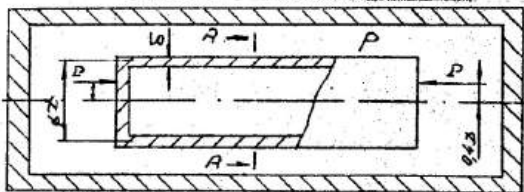


Рис. 2.26

Решение. Все сечения цилиндра на некотором удалении от дна равноопасны. Рассмотрим любое из них, например, сечение А-А (рис. 2.27). Силу  $P$  необходимо привести к центру тяжести сечения, в результате этого получим силу  $\rho$ , приложенную центрально, и изгибающий момент  $M = 0,4 \rho D$ . В качестве расчетных точек сечения наметим точки I и II, расположенные на оси  $Y$ . В этих точках напряжения от изгиба достигают наибольших значений, а напряжения от других силовых факторов во всех точках сечения одинаковы. Компоненты напряженного состояния определим на основе принципа независимости действия сил. Напряженное состояние в расчетных точках изображено на рис. 2.27. От внешнего давления возникают меридиональное  $\sigma_m$  и окружное  $\sigma_t$  напряжения, которые определяются по формулам

$$\sigma_m = \frac{\rho D}{4\delta} = \frac{5 \cdot 20}{4 \cdot 1} = 25 \text{ МПа}; \quad \sigma_t = \frac{\rho D}{2\delta} = \frac{5 \cdot 20}{2 \cdot 1} = 50 \text{ МПа}.$$

От силы  $\rho$ , приложенной в центре тяжести сечения, появляется сжимающее напряжение  $\sigma_c$ , одинаковое во всех точках сечения,

$$\sigma_c = \frac{P}{\pi D \delta} = \frac{4,4 \cdot 10^3}{\pi \cdot 20 \cdot 1 \cdot 10^{-6}} = 70 \text{ МПа}.$$

От момента  $M$  в расчетных точках возникают нормальные напряжения изгиба  $\sigma$ , которые равны

$$\sigma = \frac{M}{W_x} = \frac{4,04 \tau D}{\pi \cdot D^2 \cdot \delta} = \frac{16 P}{\pi D \delta} = 1,6 \sigma_c = 112 \text{ МПа}.$$

Все площадки в расчетных точках главные.

Расчет точки I.

Определяем главные напряжения

$$\sigma_{\text{I}} = \sigma_x = -50 \text{ МПа}; \quad \sigma_y = 0;$$

$$\sigma_{\text{II}} = \sigma_z = -\sigma_m - \sigma_c - \sigma = -25 - 70 - 112 = -207 \text{ МПа}.$$

Окончательно

$$\sigma_1 = 0; \quad \sigma_2 = -50 \text{ МПа}; \quad \sigma_3 = -207 \text{ МПа}.$$

Материал, из которого изготовлен цилиндр, неодинаково сопро-

твляется растяжению и сжатию, поэтому эквивалентное напряжение определяем по теории прочности Мора:

$$\sigma_{\text{экв}}^I = \sigma_1 - \sigma_3 = 0 - 1(-20) = 20 \text{ МПа}.$$

Расчет точки II.

Определяем главные напряжения

$$\sigma_{1A} = \sigma_x = -50 \text{ МПа}; \quad \sigma_{1A} = \sigma_y = 0;$$

$$\sigma_{1A} = \sigma_2 = -\sigma_m - \sigma_c + \sigma = -25 - 70 + 112 = 17 \text{ МПа}.$$

Окончательно

$$\sigma_1 = 17 \text{ МПа}; \quad \sigma_2 = 0; \quad \sigma_3 = -50 \text{ МПа}.$$

Определяем эквивалентное напряжение

$$\sigma_{\text{экв}}^{\text{II}} = \sigma_1 - \sigma_3 = 17 - 1(-50) = 67 \text{ МПа}.$$

Опасной является точка I. Коэффициент запаса по пределу прочности

$$n_1 = \frac{\sigma_{\text{Тр}}}{\sigma_{\text{экв}}^I} = \frac{300}{20} = 1,4.$$

Круговая диаграмма напряжений Мора для опасной точки изображена на рис.2.25.

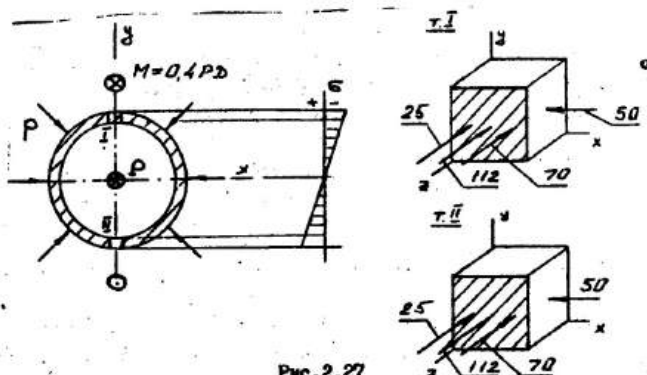


Рис.2.27

Пример 2.8. Средняя часть плунжера с проточкой расположена внутри камеры, в которой поддерживается давление  $p$ . Кроме этого, плунжер нагружен внецентрично приложенными растягивающими силами  $P$  (рис.2.29). Произвести поверочный расчет плунжера на некотором удалении от торцов, уступов и уплотнений. Конструкция уплотнений такова, что они не оказывают влияния на напряженно-деформированное со-

стояние плунжера. Дано:  $d = 24$  мм,  $d_1 = 20$  мм,  $\rho = 200$  МПа,  $a = 1,0$  мм,  $P = 30$  кН,  $\sigma_{\text{тп}}, \sigma_{\text{тс}} = 500$  МПа.

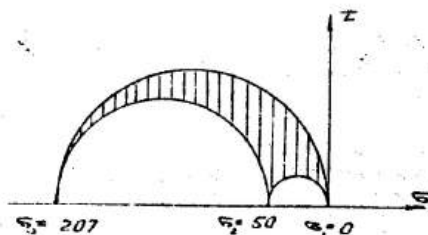


Рис.2.28

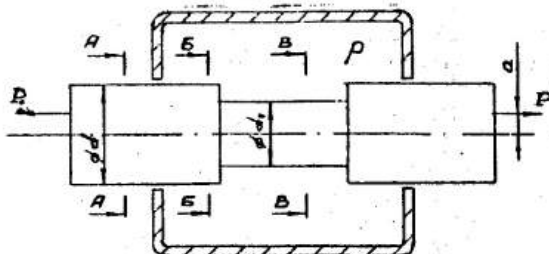


Рис.2.29

Решение. На плунжере необходимо выделить три участка: участок вне камеры, участок внутри камеры с диаметром  $d$  и проточку с диаметром  $d_1$ . На каждом из этих участков намечаем расчетное сечение, соответственно А-А, Б-Б, В-В.

В сечении А-А (рис.2.30) напряжения возникают только за счет внецентренного растяжения. Расчетной точкой в этом сечении является точка I – верхняя точка вертикального диаметра, расположенная в зоне растяжения. Напряженное состояние в точке I показано на рис.2.30. Напряжение  $\sigma_z$  определяется по формуле

$$\sigma_z = \frac{P}{F} + \frac{P \cdot a}{W_x} = \frac{4P}{\pi d^2} + \frac{32P \cdot a}{\pi d^3} =$$

$$= \frac{4 \cdot 30 \cdot 10^3}{\pi (24)^2 \cdot 10^{-6}} + \frac{32 \cdot 30 \cdot 10^3 \cdot 1 \cdot 10^{-3}}{\pi (24)^3 \cdot 10^{-9}} = 88,4 \text{ МПа}.$$

В этой точке одноосное растяжение:  $\sigma_1^I = \sigma_z = 88,4 \text{ МПа}$ ,  $\sigma_2^I = \sigma_3^I = 0$ . Следовательно, напряжение  $\sigma_1^I$  можно сравнивать с эквивалентными

напряжениями в других точках.

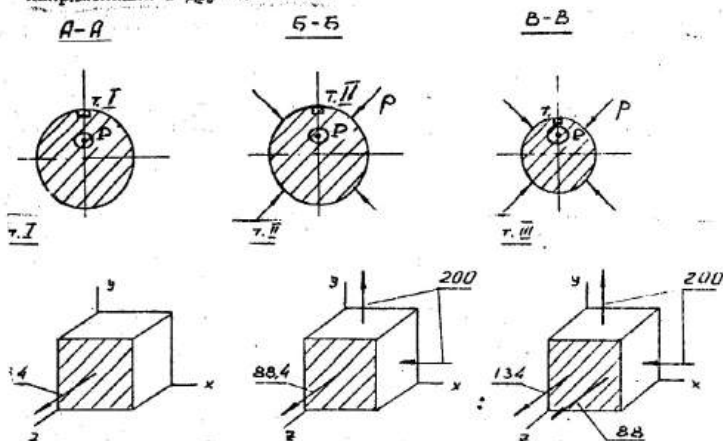


Рис. 2.30

В сечении Б-Б напряженное состояние возникает за счет внецентренного растяжения и давления в камере. Давление вызывает двухосное равномерное сжатие с компонентами ( $\sigma$ ) в любых двух взаимно перпендикулярных площадках, параллельных оси плунжера. Нормальное напряжение в осевом направлении за счет давления не возникает, так как на торцы плунжера не действует избыточное давление. Расчетной точкой в сечении Б-Б является точка II – верхняя точка вертикального диаметра. Напряженное состояние в этой точке показано на рис. 2.30. Главные напряжения в точке II:  $\sigma_1^{\text{II}} = 88,4 \text{ МПа}$ ,  $\sigma_2^{\text{II}} = \sigma_3^{\text{II}} = -200 \text{ МПа}$ .

Эквивалентное напряжение для материала плунжера можно вычислять по энергетической теории и по теории наибольших касательных напряжений. Выберем последнюю с целью упрощения расчетов:

$$\sigma_{\text{экв}}^{\text{II}} = \sigma_1^{\text{II}} - \sigma_3^{\text{II}} = 88,4 + 200 = 288 \text{ МПа}.$$

Напряженное состояние в сечении В-В определяется внецентренным растяжением и давлением в камере. Однако, в отличие от сечения Б-Б, здесь от давления возникает осевое растягивающее напряжение (см. рис. 2.30). Это напряжение равно отношению равнодействующей сил давления на уступы плунжера к площади поперечного сечения

чения протоки

$$\sigma_z^p = \frac{\rho \frac{\pi}{4} (d^2 - d_1^2)}{\frac{\pi}{4} d_1^2} = \rho \left( \frac{d^2}{d_1^2} - 1 \right) = 200 \left[ \left( \frac{24}{20} \right)^2 - 1 \right] = 88 \text{ МПа}.$$

В качестве расчетной точки в сечении В-В выберем точку III. Напряженное состояние в этой точке показано на рис. 2.30. Напряжение от внецентренного растяжения в этой точке вычисляется по формуле

$$\begin{aligned} \sigma_z &= \frac{\rho}{F_1} + \frac{\rho a}{W_x} = \frac{4\rho}{\pi d_1^2} + \frac{32\rho a}{\pi d_1^3} = \\ &= \frac{4 \cdot 30 \cdot 10^3}{\pi (20)^2 \cdot 10^{-6}} + \frac{32 \cdot 30 \cdot 10^3 \cdot 1 \cdot 10^{-3}}{\pi (20)^3 \cdot 10^{-9}} = 134 \text{ МПа}. \end{aligned}$$

Напряжение  $\sigma$  в площадке Z получается суммированием

$$\sigma = \sigma_z^p + \sigma_z = 88 + 134 = 222 \text{ МПа}.$$

Главные напряжения в этой точке

$$\sigma_1 = 222 \text{ МПа}, \quad \sigma_2 = \sigma_3 = -200 \text{ МПа}.$$

Эквивалентное напряжение в точке III равно

$$\sigma_{\text{экв}}^{\text{III}} = \sigma_1 - \sigma_3 = 222 - (-200) = 422 \text{ МПа}.$$

Опасной для плунжера является точка III. Коэффициент запаса по пределу текучести для плунжера равен

$$n_T = \frac{\sigma_{\text{Тр}}}{\sigma_{\text{экв}}^{\text{III}}} = \frac{500}{422} = 1,2.$$