

Бесплатно

Министерство высшего и среднего специального образования СССР

Московское ордена Ленина, ордена Октябрьской Революции
и ордена Трудового Красного Знамени
высшее техническое училище им. Н. Э. Баумана

И. Д. КИСЕНКО, Е. В. СОСНОВСКИЙ

РАСЧЕТЫ ПРИ РАСТЯЖЕНИИ И СЖАТИИ

Методические указания к домашним заданиям
по сопротивлению материалов
для студентов вечернего факультета

Москва

1985

Министерство высшего и среднего специального образования СССР

Московское ордена Ленина, ордена Октябрьской Революции
и ордена Трудового Красного Знамени
высшее техническое училище им. Н.Э. Баумана

И.Д.Кисенко, Б.В.Сосновский

Утверждено
редакцией ИТУ

РАСЧЕТЫ ПРИ РАСТЯЖЕНИИ И СЖАТИИ

Методические указания к домашним заданиям
по сопротивлению материалов
для студентов вечернего факультета

Под редакцией А.С.Газаряна

Данные методические указания издаются в соответствии с учебным планом. Рассмотрены и одобрены кафедрой К-5 03.04.84 г., методической комиссией факультета К II. 04.84 г. и учебно-методическим управлением 18.05.84 г.

Рецензент доц. МАДИ Хислин А.П.

© Московское высшее техническое училище им. Н.Э.Баумана

ОБОЗНАЧЕНИЯ

/в квадратных скобках указаны единицы измерения/

- Z - ось стержня,
- P - сосредоточенная внешняя сила [Н],
- q - интенсивность распределенной нагрузки $\left[\frac{H}{m}\right]$,
- N - продольная сила /равновесная внутренняя нормальная сила в поперечном сечении стержня/ [Н],
- F - площадь поперечного сечения стержня $[m^2]$,
- l - длина стержня [м],
- σ - нормальное напряжение [Па],
- $[\sigma]$ - допускаемое напряжение [Па],
- ϵ - продольная деформация,
- Δl - изменение длины стержня [м],
- w - осевое перемещение поперечного сечения стержня [м],
- E - модуль упругости первого рода [Па],
- σ_{tr} - предел текучести при растяжении [Па],
- σ_{tc} - предел текучести при сжатии [Па],
- α - коэффициент температурного линейного расширения $\left[\frac{1}{град}\right]$,
- η - коэффициент запаса по пределу текучести,
- A - работа внешних сил [Дж],
- U - потенциальная энергия деформации [Дж].

ОСНОВНЫЕ ЗАВИСИМОСТИ

Закон Гука $\sigma = E \cdot \epsilon$ при $\sigma \leq \sigma_n$, где σ_n - предел пропорциональности/.

Нормальное напряжение в поперечном сечении стержня $\sigma = \frac{N}{F}$.

Продольная деформация $\epsilon = \frac{\Delta l}{l}$.

изменение длины l стержня

$$\Delta l = \int_0^l \frac{N \cdot dz}{EF} \quad \text{или} \quad \Delta l = \frac{N \cdot l}{EF} \quad \text{при} \quad \epsilon = const.$$

Условие прочности: $\sigma_{max} \leq [\sigma]$, где $[\sigma] = \frac{\sigma_{tr}}{\eta}$ - допускаемое напряжение.

Коэффициенты запаса по пределу текучести при растяжении и при сжатии:

$$\eta_T = \frac{\sigma_{tr}}{\sigma_{max}}, \quad \eta_C = \frac{\sigma_{tc}}{\sigma_{max}}$$

Работа внешней силы $A = \frac{1}{2} P w_p$, т.е. w_p - перемещение точки приложения силы по направлению силы.

Потенциальная энергия деформации
$$U = \int_0^l \frac{N^2 dz}{2EF}$$

ПРАВИЛА ЗНАКОВ

При растяжении стержня равнодействующая N внутренних нормальных сил в поперечном сечении /... продольная сила/ направлена от сечения (рис. 1), при сжатии - к сечению (рис. 2).

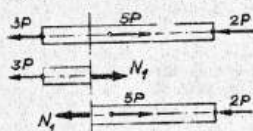


Рис. 1

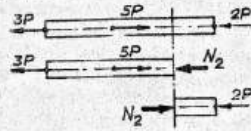


Рис. 2

При растяжении продольная сила N считается положительной, при сжатии - отрицательной. Например, $N_1 = 3P$ (см. рис. 1), $N_2 = -2P$ (рис. 2). Знак силы N определяет и знаки нормального напряжения σ , продольной деформации ϵ и изменения длины Δl . При решении задачи направление искомого продольной силы может быть выбрано произвольно. Если найденная сила будет иметь знак плюс, то это означает, что выбранное направление силы совпадает с действительным. В последующих расчётах этой силе приписывается знак в соответствии с указанным выше правилом. Заметим, что если искомую силу N всегда направлять от сечения, т.е. считать положительной, то знак результата будет соответствовать установленному правилу знаков.

В задачах 1 и 2 рассмотрены статически определимые системы. В этом классе систем все силовые факторы определяются непосредственно из уравнений статического равновесия.

ЗАДАЧА 1. Построить эпюры продольных сил N , нормальных напряжений σ , осевых перемещений w . Найти абсолютные значения и потенциальную энергию деформации (рис. 3). Дано: P, l, E, F .

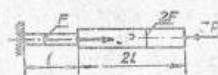


рис. 3

Решение. Реакции опоры определяются из уравнений статического равновесия стержня. Замечая опору силой R (рис. 4), составим уравнение $\sum P_x = 0$,

$$R + 5P - 3P = 0$$

$$\text{и получим } R = -2P$$

Знак минус указывает, что действительное направление

силы R противоположно изображаемому на рис. 4.

Продольные силы определяются в сечении. На первом участке AB (рис. 5) и на втором участке BC выберем произвольные сечения 1-1 и 2-2 с абсциссами z_1 и z_2 . Рассматривая сечение 1-1 (рис. 6), замечаем, что соответствующие части сил N_1 и N_2 , составляющие $\sum P_x = 0$, являются равновесием сечения.



Рис. 5



Рис. 6

и находит значения и направления продольных сил N_1 и N_2 :

$$\sum P_x = 0, \quad N_1 - 2P = 0,$$

$$N_1 = 2P \text{ /растяжение/}$$

$$\sum P_x = 0, \quad N_2 + 5P - 2P = 0,$$

$$N_2 = -3P \text{ /сжатие/}$$

Нормальные напряжения:

$$\sigma_1 = \frac{N_1}{F} = \frac{2P}{F} \text{ /сечение 1/,} \quad \sigma_2 = \frac{N_2}{F} = -\frac{3P}{F} \text{ /сечение 2/}$$

Осевое перемещение w любого сечения равно изменению длины, заключенной между этим сечением и неподвижным сечением A .

Перемещение сечения 1:

$$w_1 = \Delta z_1 = \frac{N_1 \cdot z_1}{EF} = \frac{2P \cdot z_1}{EF}, \quad 0 \leq z_1 \leq l$$

$$Z_1 = 0, \quad W_1 = W_A = 0; \quad Z_2 = l, \quad W_2 = W_B = \frac{2Pl}{EF}.$$

Знак пл. указывает на увеличение длины участка AB . При неподвижном левом сечении A это означает, что сечение B перемещается вправо.

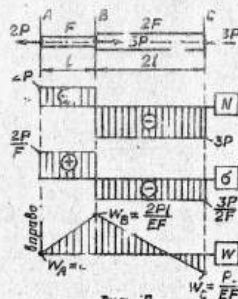


Рис. 7

Перемещение сечения 2 относительно сечения 1:

$$W_2 = \Delta l_{AB} + \Delta z_2 = \frac{2Pl}{EF} + \frac{(-3P) \cdot z_2}{E \cdot 2F}, \quad 0 \leq z_2 \leq 2l;$$

$$z_2 = 0, \quad W_2 = W_B = \frac{2Pl}{EF};$$

$$z_2 = 2l, \quad W_2 = W_C = -\frac{Pl}{EF}.$$

Знак минус указывает на уменьшение длины AC . При неподвижном левом сечении A это означает, что сечение C перемещается влево.

Заметим, что при напю, их-ном правом концевом сечении нумерация участков удобнее вести от этого сечения, отсчитывая абсциссы z влево. В этом случае результат $W > 0$ означает перемещение влево, а $W < 0$ - перемещение вправо.

Эпюры N , σ , W показаны на рис. 7. Положительные значения N и σ отложены вверх, в этом же направлении отложены ординаты W , указывающие на перемещение вправо.

Работы внешних сил

$$A = \frac{1}{2} \cdot 2Pl + \frac{1}{2} \cdot 5Pl + \frac{1}{2} \cdot 3Pl = 0 + \frac{5P}{2} \cdot \frac{2Pl}{EF} + \frac{3P}{2} \cdot \frac{Pl}{EF} = \frac{13P^2 l}{2EF}.$$

Весьма все слагаемые работы сил положительны, так как направления и перемещений W_B и W_C совпадают с направлениями соответствующих сил $5P$ и $3P$. Вплоть направления сил и направление точ. её приложения противоположны, то работа силы отрицательна.

Потенциальная энергия деформации

$$U = U_1 + U_2 = \int_0^l \frac{N^2 \cdot dz}{2EF} + \int_l^{2l} \frac{N_2^2 \cdot dz}{2EF} = \frac{(2P)^2 l}{2EF} + \frac{(-3P)^2 \cdot 2l}{2EF} = \frac{13P^2 l}{2EF}.$$

Заметим, что выполнение равенства $A = U$, отражающего закон сохранения энергии, не служит про- зрой решения.

ЗАДАЧА 2. Построить эпюры продольных сил N , нормальных напряжений σ и осевых перемещений W , полагая $P = ql$ (рис. 8). Найти коэффициент запаса по пределу текучести n_T . Дано: $q, l, F, E, \sigma_{TB} = \sigma_{TC} = \tau$.

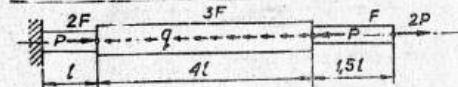


Рис. 8

Решение. Реакция опор R (рис. 9) определяется из уравнения равновесия стержня:

$$\Sigma P_z = 0, \quad R + ql - q \cdot 4l - ql + 2ql = 0, \quad R = 2ql.$$

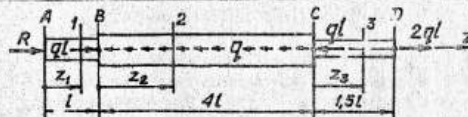


Рис. 9

Продольные силы определяются из уравнений равновесия отсеченных частей стержня (рис. 10).

Часток AB $0 \leq z_1 \leq l$, $N_1 = -2ql$ (рис. 10 а).

Часток BC $0 \leq z_2 \leq 4l$, $N_2 = -qz_2 + ql + 2ql = 0$, $N_2 = qz_2 - 3ql$ (рис. 10 б).

участок CD / $0 \leq z_3 \leq 1,5l$ /,
 $N_3 = -q_1 - 4ql + ql + 2ql = 0$, $N_3 = 2ql$ (рис. 10 в).

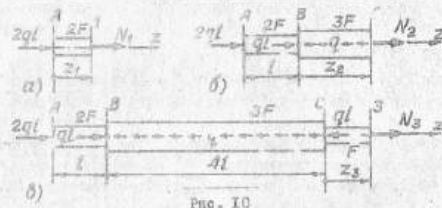


Рис. 10

Нормальные напряжения:

$$\sigma_1 = \frac{N_1}{F} = -\frac{2ql}{F}, \quad \sigma_2 = \frac{N_2}{3F} = \frac{qz_2 - 3ql}{3F}, \quad \sigma_3 = \frac{N_3}{F} = \frac{2ql}{F}.$$

Осевые перемещения относительно сечения А:

$$W_1 = \Delta z_1 = \frac{N_1 z_1}{2EF} = -\frac{2ql z_1}{2EF}; \quad z_1 = 0, \quad W_1 = W_A = 0;$$

$$z_1 = l, \quad W_1 = W_B = -\frac{ql^2}{EF}, \text{ сжатие влево.}$$

$$W_2 = \Delta z_2 = -\frac{ql^2}{EF} + \frac{q^2}{3F} \int_0^{z_2} z_2 dz_2 = -\frac{ql^2}{EF} + \frac{q^2}{3F} \int_0^{z_2} (qz_2 - 3ql) dz_2 =$$

$$= -\frac{ql^2}{EF} + \frac{q^2 z_2^2}{6F} - \frac{ql z_2}{F}; \quad z_2 = 0, \quad W_2 = W_B = -\frac{ql^2}{EF};$$

$z_2 = 4l$, $W_2 = W_C = -\frac{7ql^2}{EF}$ /перемещение влево/. Характер эпюры W на участке BC определяется квадратичной функцией W_2 .

Исследуем функцию W_2 на экстремум. Из уравнения $dW_2/dz_2 = 0$

$$z_2 = z^* = 3l. \text{ При } z_2 = 3l \text{ находим экстремальное значение}$$

$$W_2 = -\frac{ql^2}{EF} + \frac{q(3l)^2}{6F} - \frac{ql \cdot 3l}{F} = -\frac{5ql^2}{2EF} \text{ /влево/}.$$

Большее значение z^* оказывается за пределами рассматриваемого участка, то это означает, что экстремум функции не имеет физического смысла, так как вершина параболы находится вне участка.

$$W_3 = \Delta z_3 = -\frac{7ql^2}{3EF} + \frac{2ql z_3}{EF}; \quad z_3 = 0, \quad W_3 = W_C = -\frac{7ql^2}{3EF}.$$

$$z_3 = 1,5l, \quad W_3 = W_D = \frac{2ql^2}{3EF} \text{ /перемещение вправо/}.$$

Эпюры продольных сил N , нормальных напряжений σ и осевых перемещений W показаны на рис. 11.

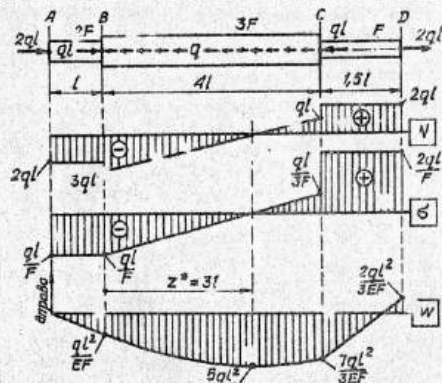


Рис. 11

Эпюра σ показывает, что самым напряженным оказался участок CD: во всех поперечных сечениях участка нормальные напряжения имеют наибольшее значение $\sigma_{\max} = \frac{2ql}{F}$ /растяжение/. Это значение и служит для оценки прочности стержня, т.е. для определения коэффициента запаса по пределу текучести.

$$n_t = \frac{\sigma_r}{\sigma_{\max}} = \frac{\sigma_r F}{2ql}.$$

В последующих задачах рассмотрены статические неопределимые системы, в которых заданы все неизвестные силовые факторы, и, кроме уравнений статического равновесия, требуется также число уравнений совместности деформаций, так как число неизвестных превышает число уравнений статического равновесия. В задаче 3 показано раскрытие статической неопределимости на примере стержня с жестко закрепленными торцами.

ЗАДАЧА 3. Построить эпюры продольных сил N , нормальных напряжений σ и осевых перемещений w сечений. Найти величину площади F поперечного сечения (рис. 12), зная $P = 40$ кН, $\sigma_{TP} = \sigma_{TC} = 240$ МПа, $\alpha_T = 2,0$.

Решение. Выбирая опоры осевыми силами R_A и R_C произвольного направления (рис. 13), составим уравнение равновесия стержня:

$$\sum P_i = 0, -P_A + 5P + R_C = 0, \\ R_A - R_C = 5P. \quad /1/$$

Это единственное уравнение равновесия содержит две неизвестные силы, следовательно, система один раз статически неопределима. Чтобы получить второе уравнение (уравнение перемещений) необходимо установить зависимость между изменениями длин элементов системы. В данном случае конечные сечения A и C неподвижны, поэтому длины от них не изменятся, т.е. алгебраическая сумма изменений длин участков AB и BC равна нулю:

$$\Delta l_{AC} = \Delta l_{AB} + \Delta l_{BC} = 0 \quad \text{или} \quad \frac{N_1 \cdot l}{EF} + \frac{N_2 \cdot 3l}{E \cdot 2F} = 0 \quad /2/$$



Рис. 14

Из уравнений равновесия $\sum P_i = 0$ отсеченных частей стержня (рис. 14) следует, что $N_1 = R_A$, $N_2 = R_C - 5P$.

Подставляя в /2/, получаем $\frac{R_A \cdot l}{EF} + \frac{(R_A - 5P) \cdot 3l}{E \cdot 2F} = 0$,

откуда $R_A = 3P$. Знак плюс указывает, что выбранное направление силы R_A (см. рис. 13) совпадает с действительным.

Из /1/ следует, что $R_C = -2P$. Знак минус означает, что направление силы R_C противоположно показанному на рис. 13. Итак, статическая неопределимость раскрыта — найдены величины и направления реакции опор (рис. 15). По этим же величинам построим эпюры аналогично расчетам, выполненным в задаче 1.

Продольные силы:

$$N_1 = 3P, \quad N_2 = -2P \quad (\text{см. рис. 16}).$$

Нормальные напряжения:

$$\sigma_1 = \frac{N_1}{F} = \frac{3P}{F}, \\ \sigma_2 = \frac{N_2}{2F} = -\frac{2P}{2F} = -\frac{P}{F}.$$

Осевые перемещения:

$$w_1 = \Delta z_1 = \frac{N_1 \cdot z_1}{EF} = \frac{3P \cdot z_1}{E}; \\ z_1 = 0, \quad w_1 = w_A = 0, \\ z_2 = l, \quad w_1 = w_B = \frac{3Pl}{EF}$$

/перемещение вправо/;

$$w_2 = \Delta l_{AB} + \Delta z_2 = w_B + \frac{N_2 \cdot z_2}{E \cdot 2F} = \frac{3Pl}{EF} - \frac{2P \cdot z_2}{E \cdot 2F};$$

$z_2 = 0, \quad w_2 = w_B = \frac{3Pl}{EF}; \quad z_2 = 3l, \quad w_2 = w_C = 0$, что и следовало ожидать, так как сечение C неподвижно.

Эпюры продольных сил N , нормальных напряжений σ и осевых перемещений w показаны на рис. 15.

Заметим, что эпюра осевых перемещений при отсутствии распределенных нагрузок имеет на каждом участке линейный характер и поэтому может быть построена, если известны значения перемещений граничных сечений. Например, в этой задаче эпюры

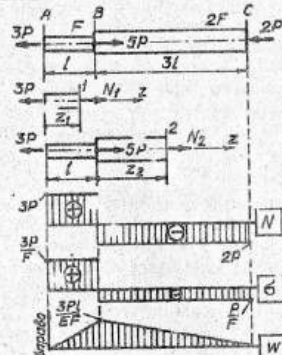


Рис. 15

осевых перемещений строится по трем значениям: $w_A = 0$,
 $w_B = \delta'_{AB} = \frac{3R_A l}{EF}$, $w_C = 0$.

Площадь поперечного сечения F стержня определяется из условия прочности $\sigma_{\max} [\sigma]$, где $\sigma_{\max}$ — наибольшее нормальное напряжение, $[\sigma] = \frac{\sigma_T}{n_T}$ — допускаемое напряжение.

В данном случае $\frac{3R_A l}{F} \leq \frac{\sigma_T}{n_T}$ и $F \geq \frac{3R_A l}{\sigma_T n_T} = \frac{8 \cdot 40 \cdot 10^3 \cdot 2}{240} = 1000 \text{ мм}^2$.

Нетрудно найти линейный размер сечения в зависимости от его формы. Например, стержень круглого сечения должен иметь наименьший диаметр $35,7 \approx 36 \text{ мм}$, а стержень квадратного сечения должен иметь размер стороны не менее $31,6 \approx 32 \text{ мм}$.

В задачах 4 и 5 рассмотрено влияние изменения температуры на напряжения и перемещения в статически неопределимых системах.

ЗАДАЧА 4. Стержень установлен между жесткими опорами при температуре $t_1 = 20^\circ\text{C}$ (рис. 16). Найти наибольшее нормальное

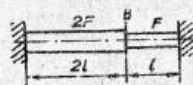


Рис. 16

напряжение в поперечном сечении стержня, вычислить осевое перемещение сечения B при температуре $t_2 = 60^\circ\text{C}$. Дано: $l = 100 \text{ мм}$, $\alpha = 22 \cdot 10^{-6} \text{ 1/град}$, $E = 7,5 \cdot 10^4 \text{ МПа}$ /дюйм/.



Рис. 17

Решение. При повышении температуры стержень должен получить удлинение $\Delta l = \alpha \cdot 3l \cdot \Delta t$, где $\Delta t = t_2 - t_1 = 60 - 20 = 40^\circ\text{C}$. Этому удлинению препятствуют опоры, влияние которых сводится к появлению реактивных сил R_A и R_C (рис. 17), вызывающих сжатие стержня. Из уравнения равновесия $\sum R = 0$ следует, что $R_A = R_C$, но величина сил остается неизвестной. Чтобы раскрыть статическую неопределимость, нужно составить уравнение перемещений.

Из уравнения равновесия $\sum R = 0$ следует, что $R_A = R_C$, но величина сил остается неизвестной. Чтобы раскрыть статическую неопределимость, нужно составить уравнение перемещений.

Так как концевые сечения A и C неподвижны, то $\Delta l_{AC} = 0$.

$$\text{или } \alpha \cdot 3l \cdot \Delta t + \frac{N_1 \cdot 2l}{E \cdot 2F} + \frac{N_2 l}{EF} = 0.$$

Учитывая, что $N_1 = N_2 = -R_A$ (см. рис. 17), получим:

$$\alpha \cdot 3l \cdot \Delta t - \frac{R_A \cdot 2l}{E \cdot 2F} - \frac{R_A l}{EF} = 0 \text{ и } R_A = \frac{3}{2} \alpha \cdot \Delta t \cdot EF$$

Знак плюс указывает, что направление силы R_A на рис. 17 совпадает с действительным.

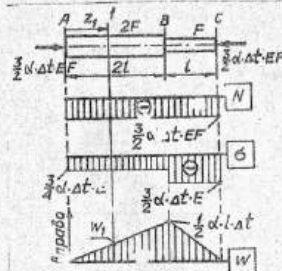


Рис. 18

Продольные силы:

$$N_1 = N_2 = -R_A = -\frac{3}{2} \alpha \cdot \Delta t \cdot EF.$$

Нормальные напряжения:

$$\sigma_1 = \frac{N_1}{2F} = -\frac{3}{4} \alpha \cdot \Delta t \cdot E,$$

$$\sigma_2 = \frac{N_2}{F} = -\frac{3}{2} \alpha \cdot \Delta t \cdot E.$$

Эти же продольные силы N и нормальные напряжения σ изображены на рис. 18.

Наибольшее напряжение

$$\sigma = \sigma_2 = -\frac{3}{2} \alpha \cdot \Delta t \cdot E = -\frac{3}{2} \cdot 22 \cdot 10^{-6} \cdot 40 \cdot 7,5 \cdot 10^4 = -10^6 \text{ кПа}.$$

Этот результат, составляющий примерно одну треть предела текучести материала (для дюралюминия $\sigma_{TC} = 340 \text{ МПа}$), показывает, что температурные напряжения могут оказывать существенное влияние на прочность.

Осевое перемещение сечения B определяется из изменения длины участка Z_1 (см. рис. 18):

$$w_1 - \Delta Z_1 = \alpha \cdot Z_1 \cdot \Delta t + \frac{N_1 \cdot Z_1}{E \cdot 2F} = \alpha \cdot Z_1 \cdot \Delta t - \frac{3}{4} \alpha \cdot Z_1 \cdot \Delta t;$$

$Z_1 = 0$, $w_1 = w_A = 0$, $Z_1 = 2l$, $w_1 = w_B = \frac{1}{2} \alpha \cdot l \cdot \Delta t$ /перем./, перемещение сечения B можно вычислить также и как изменение длины участка BC :

$$w_B = \Delta l_{BC} = \alpha \cdot l \cdot \Delta t + \frac{N_2 \cdot l}{EF} = \alpha \cdot l \cdot \Delta t - \frac{3}{2} \alpha \cdot l \cdot \Delta t = -\frac{1}{2} \alpha \cdot l \cdot \Delta t = -\frac{1}{2} \cdot 22 \cdot 10^{-6} \cdot 40 \cdot 100 = -0,44 \text{ мм /перемещение влево/}$$

ЗАДАЧА 5. На сколько градусов Δt нужно повысить температуру стержней AB и CD (рис. 19), чтобы зазор δ закрылся? Построить эпюры продольных сил N , нормальных напряжений σ и осевых перемещений W при повышении температуры на Δt , $l_1 = 2\Delta t$ градусов, дано: δ , l , E , F , α .



Рис. 19

Решение. Зазор δ закрывается, если суммарное удлинение стержней окажется равным величине зазора: $\alpha \cdot 2l \cdot \Delta t + \alpha \cdot l \cdot \Delta t = \delta$, отсюда

$$\Delta t = \frac{\delta}{3\alpha l}$$

При повышении температуры на Δt , $2\Delta t$ возникнут реакции в опорах, причем $R_A = -R_D$ (рис. 20).

Поставив уравнения перемещений, учитывая, что стержни AB и CD имеют возможность удлиняться на величину начального зазора δ :

$$\alpha \cdot 2l \cdot \Delta t_1 + \frac{N_1 \cdot 2l}{E \cdot 2F} + \alpha \cdot l \cdot \Delta t_1 + \frac{N_2 \cdot l}{EF} = \delta;$$

так как $N_1 = N_2 = -R_A$ (см. рис. 20) и $\Delta t_1 = 2\Delta t$, то

$$\alpha \cdot 3l \cdot 2\Delta t - \frac{R_A \cdot 2l}{E \cdot 2F} - \frac{R_A \cdot l}{EF} = \delta.$$

Подставив $\Delta t = \frac{\delta}{3\alpha l}$, находим $R_A = \frac{EF\delta}{2l}$.

Продольные силы: $N_1 = N_2 = -R_A = -\frac{EF\delta}{2l}$.

Нормальные напряжения: $\sigma_1 = \frac{N_1}{2F} = -\frac{E\delta}{4l}$, $\sigma_2 = \frac{N_2}{F} = -\frac{E\delta}{2l}$.

Осевые перемещения: $w_B = \Delta l_{AB} = \alpha \cdot 2l \cdot \Delta t + \frac{N_1 \cdot 2l}{2EF} =$

$$= \alpha \cdot 2l \cdot 2 \frac{\delta}{3\alpha l} - \frac{EF\delta \cdot 2l}{2l \cdot 2EF} = \frac{5}{6} \delta. \quad \text{/знак плюс указывает на увеличение длины участка CD, что при неподвижном сечении D означает перемещение сечения C влево/}$$



Рис. 20

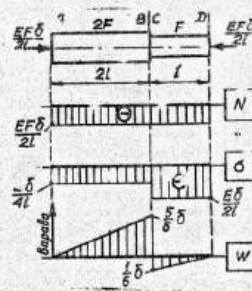


Рис. 21

эпюре W , отражающий взаимное перемещение сечений B и C , равен, как и следовало ожидать, начальному зазору δ .

ЗАДАЧА 6. Стержни AB и CD установлены начальным зазором Δ (рис. 22). Построить эпюры продольных сил N , нормальных напряжений σ и осевых перемещений W при двух значениях силы P : 1) $P_1 = P$, 2) $P_2 = 3P$, полагая, что $\Delta = \frac{2F}{EF}$. Вычислить наибольшие напряжения в обоих случаях, полагая $P = 30 \text{ кН}$, $F = 500 \text{ мм}^2$.

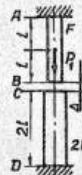


Рис. 22

Решение. Если зазор не закрыт (рис. 23), то сила P_1 растягивает лишь участок AK , и сечения K и B получают одинаковые отклики перемещения $w_K = w_B =$

$\frac{Pl}{EF}$. При $P_2 = 3P$ перемещение $w_B = \frac{l}{E}$ меньше величины зазора Δ . Следовательно, зазор остается открытым, и стержень CD не нагружен. Эпюры продольных сил N , нормальных напряжений σ и осевых перемещений W для этого случая даны на рис. 23.

Нормальные напряжения

$$\sigma = \frac{P}{F} = \frac{30 \cdot 10^3}{500} = 60 \text{ МПа.}$$

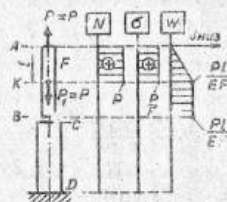


Рис. 28

Из уравнения $W_B = \frac{Pl}{EF} = -$ следует, что зазор закрывается при $P_1 = \frac{2F \cdot \Delta}{l} = \frac{EF \cdot 2Pl}{l \cdot EF} = 2P$.

Следовательно, при $P_1 = 3P$ зазор будет закрыт, и стержень CD нагружен (рис. 24).

Уравнения равновесия:

$$R_A - 3P + R_D = 0.$$

При составлении уравнения перемещений учитываем, что суммарное изменение длин стержней равно величине начального зазора:

$$\Delta l_{AB} + \Delta l_{CD} = \Delta.$$

Внутренние силы N_1, N_2, N_3 в поперечных сечениях всех участков показаны на рис. 25.

$$\text{Так как } \Delta l_{AB} = \Delta l_{AK} + \Delta l_{BC} = \frac{N_1 \cdot l}{EF} + \frac{N_2 \cdot l}{EF} = \frac{R_A \cdot l}{EF} + \frac{(R_A - 3P) \cdot l}{EF} \text{ и } \Delta l_{CD} = \frac{N_3 \cdot 2l}{E \cdot 2F} = \frac{(R_A - 3P) \cdot 2l}{E \cdot 2F},$$

то уравнение перемещений получает вид:

$$\frac{R_A \cdot l}{EF} + \frac{(R_A - 3P) \cdot l}{EF} + \frac{(R_A - 3P) \cdot 2l}{E \cdot 2F} = \frac{2Pl}{EF}, \quad R_A = \frac{6}{3}P.$$

Из уравнения равновесия следует, что $R_D = \frac{1}{3}P$.

Продолжаем силы:

$$N_1 = R_A = \frac{6}{3}P, \quad N_2 = N_3 = R_A - 3P = \frac{6}{3}P - 3P = -\frac{2}{3}P.$$

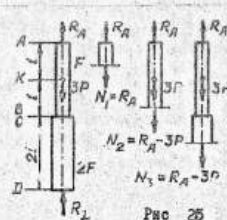


Рис. 25

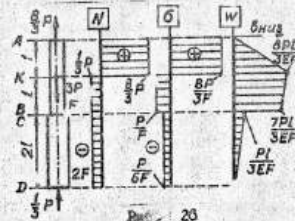


Рис. 26



Рис. 27

Нормальные напряжения:

$$\sigma_1 = \frac{N_1}{F} = \frac{8P}{3F}, \quad \sigma_2 = \frac{N_2}{F} = -\frac{2}{3F}, \quad \sigma_3 = \frac{N_3}{2F} = -\frac{P}{6F}.$$

на участках N и Q (рис. 26) положительными значениями отложены вправо, отрицательные — влево.

Основные перемещения: $W_A = \gamma, \quad W_D = 0;$

$$W_K = \Delta l_{AK} = \frac{N_1 \cdot l}{EF} = \frac{8Pl}{3EF} \text{ /перемещение вниз/;}$$

$$W_B = \Delta l_{AB} = W_K + \Delta l_{KB} = W_K + \frac{N_2 \cdot l}{EF} = \frac{8Pl}{3EF} - \frac{Pl}{3EF} = \frac{7Pl}{3EF} \text{ /перемещение вниз/;}$$

$$W_C = \Delta l_{CD} = \frac{N_3 \cdot 2l}{E \cdot 2F} = -\frac{P \cdot 2l}{3E \cdot 2F} = -\frac{Pl}{3EF} \text{ /перемещение вниз/}$$

Заметим, что перемещения сечений B и C отличаются друг от друга на $\frac{2Pl}{EF}$ (см. рис. 26), т.е. на величину начального зазора Δ .

Наибольшее напряжение

$$\sigma = \frac{8P}{3} = \frac{1,80 \cdot 10^3}{8 \cdot 600} = 160 \text{ МПа.}$$

В последующих задачах рассматриваются конструкции, представляющие собой системы шарнирно соединенных стержней. Если система включает стержень большой жесткости, деформация которого настолько мала, что без ущерба для точности расчета могут не учитываться, то в условии задачи такой стержень называется жестким бруском.

ЗАДАЧА 7. Жесткий брус соединен шарнирно с неподвижной опорой O и подвешен на стальных стержнях AB и CD (рис. 27). Определить усилия в стержнях и найти величину площади F при $P = 100 \text{ кН}$ и $[\sigma] = 160 \text{ МПа}$.

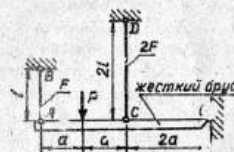


Рис. 27

Решение. Используя метод сечений, показываем внутренние силы N_1 и N_2 в поперечных сечениях стержней (рис. 28). Очевидно, что оба стержня растянуты, поэтому начисленные продольные силы N_1 и N_2 изображаем стрелками, направленными от сечений.

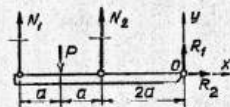


Рис. 28

Составляющие реакции опор
обозначим R_1 и R_2 , направле-
ния их выбраны произвольно.

Уравнения равновесия:

$$\sum P_x = 0, \quad R_2 = 0, \quad (1/)$$

$$\sum P_y = 0, \quad N_1 - P + N_2 + R_1 = 0; \quad (2/)$$

$$\sum m_O = 0, \quad N_1 \cdot 4a - P \cdot 3a +$$

$$+ N_2 \cdot 2a = 0, \quad 4N_1 + 2N_2 - 3P = 0. \quad (3/)$$

Из трех уравнений равновесия недостаточно для определения четырех неизвестных усилий. Система один раз статически неопределима. Чтобы составить недостающее уравнение, установим зависимость между изменением длин стержней. С этой целью изобразим систему в деформированном состоянии (рис. 29).

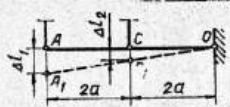


Рис. 29

Если по сравнению с линейными размерами элементов системы, что эти длины пренебрежимо малы, то различия между длинами отрезков AA_1 и CC_1 можно считать равными. Тогда, если все элементы системы, находясь при $l = 1$ м, изменить в том же масштабе, который мы имеем для отрезков Δl_1 и Δl_2 на рис. 29, то размер чертежа увеличится примерно в 700 раз.

Из подобия треугольников AOA_1 и COC_1 легко получить уравнение перемещений: $\Delta l_1 = 2\Delta l_2$.

Так как $\Delta l_1 = \frac{N_1 \cdot l}{E \cdot F}$ и $\Delta l_2 = \frac{N_2 \cdot 2l}{E \cdot 2F}$, то $\frac{N_1 \cdot l}{E \cdot F} = 2 \cdot \frac{N_2 \cdot 2l}{E \cdot 2F}$, т.е. $N_1 = 2N_2$. (4/)

Решая совместно уравнения (3/ и (4/), найдем значения

стержней:

$$N_1 = \frac{5}{10} P = \frac{5 \cdot 100}{10} = 50 \text{ кН}, \quad N_2 = \frac{3}{10} P = \frac{3 \cdot 100}{10} = 30 \text{ кН}.$$

Нормальные напряжения:

$$\sigma_1 = \frac{N_1}{F} = \frac{5P}{10F}, \quad \sigma_2 = \frac{N_2}{2F} = \frac{3P}{20F}.$$

Необходимая величина площади F поперечного сечения определяется условием прочности $\sigma \leq [\sigma]$.

Здесь $\sigma = \frac{6P}{10F}$ (стержень AB), следовательно, $\frac{6P}{10F} \leq [\sigma]$

и $F = \frac{6P}{10[\sigma]} = \frac{6 \cdot 100 \cdot 10^3}{10 \cdot 150} = 400 \text{ мм}^2$.

ЗАДАЧА 8. Три одинаковых стальных стержня поддерживают жесткий брус (рис. 30). Найти наибольшую допускаемую величину силы P при $F = 500 \text{ мм}^2$, $\sigma_{тр} = \sigma_{тс} = 400 \text{ МПа}$ (сталь 45, закаленная), $\nu = 2$. Вычислить работу силы P и потенциальную энергию деформации стержневой системы, полагая $l = 200 \text{ мм}$ и $E = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа}$.



Рис. 30

Решение. Предполагая, что все стержни испытывают одинаковые, на правые продольные силы N_1 , N_2 и N_3 от сечений (рис. 31) и составим уравнения равновесия:

$$\sum P_y = 0, \quad N_1 + N_2 + N_3 - P = 0; \quad (1/)$$

$$\sum m_O = 0, \quad N_2 \cdot 2a + N_3 \cdot 3a -$$

$$- Pa = 0. \quad (2/)$$

Для определения трех неизвестных сил необходимо составить еще одно уравнение. Это уравнение должно отражать зависимость между изменениями длин стержней.

Изобразим систему в деформированном состоянии. Положение жесткого бруса после нагружения системы силой P обозначено пунктиром (рис. 32). Все стержни должны удлиняться в соответствии со сделанным выше предположением, что они испытывают

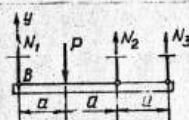


Рис. 31

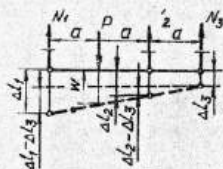


Рис. 32

Так как $\Delta l_1 = \frac{N_1 l}{EF}$, $\Delta l_2 = \frac{N_2 l}{EF}$ и $\Delta l_3 = \frac{N_3 l}{EF}$, то, подставляя их в /3/, получаем $N_1 - 3N_2 + 2N_3 = 0$. /4/ Решая совместно уравнения /1/, /2/ и уравнение перемещений /4/, находим продольные силы в стержнях:

$$N_1 = \frac{4}{3}P, \quad N_2 = \frac{2}{3}P, \quad N_3 = \frac{1}{3}P.$$

Отметим, что все силы положительны. Это означает, что выбранные направления их (см. рис. 31) совпадают с действительными.

Допускаемая сила P определяется из условия прочности: $\sigma \leq [\sigma]$.

Здесь $\sigma_{max} = \frac{N_1}{F} = \frac{4P}{7F}$ — наибольшее нормальное напряжение.

$[\sigma] = \frac{\sigma_{TP}}{n_T}$ — допускаемое напряжение. Следовательно, $\frac{4P}{7F} \leq \frac{\sigma_{TP}}{n_T}$.

и $P \leq \frac{7F\sigma_{TP}}{4n_T}$ — наибольшее допускаемое значение силы

$$P = \frac{7F\sigma_{TP}}{4n_T} = \frac{7 \cdot 500 \cdot 400}{4 \cdot 2} = 175000 \text{ Н} = 175 \text{ кН}.$$

Работа силы

$$A = \frac{1}{2} P \cdot w_p, \text{ где } w_p = \frac{\Delta l_1 + \Delta l_2}{2} = \frac{1}{2} \left(\frac{N_1 l}{EF} + \frac{N_2 l}{EF} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{4Pl}{7EF} + \frac{2Pl}{7EF} \right) = \frac{3Pl}{7EF} - \text{перемещение точки приложения силы (рис. 32)}.$$

Следовательно,

$$A = \frac{1}{2} P \cdot \frac{3Pl}{7EF} = \frac{3P^2 l}{14EF} = \frac{3 \cdot (175 \cdot 10^3)^2 \cdot 0,2}{14 \cdot 2 \cdot 10^8 \cdot 9 \cdot 500 \cdot 10^{-6}} = 19,1 \text{ Дж}.$$

Потенциальная энергия деформации

$$U = \frac{3}{2} \frac{N_1^2 l}{EF} = \frac{(4P)^2 l}{2EF} + \frac{(2P)^2 l}{2EF} + \frac{(1P)^2 l}{2EF} = \frac{5P^2 l}{14EF}.$$

Значения A и U совпадают, что отражает закон сохранения энергии и служит проверкой решения.

ЗАДАЧА 9. Стержневая система, рассмотренная в задаче 8, дополняется четвертым стержнем (рис. 33). Какова величина наибольшей допускаемой силы P ?

Решение. Уравнения равновесия

(рис. 34):

$$\sum P_y = 0,$$

$$N_1 + N_3 + N_4 - P = 0; \quad /1/$$

$$\sum \text{мат } O = 0,$$

$$N_1 a - N_3 a - N_4 2a = 0. \quad /2/$$

Стержневая система дважды статически неопределима. Для определения четырех неизвестных сил необходимо оставить два уравнения перемещений. На рис. 35 показаны два положения жесткого бруса: до нагружения системы

опорной линией и после нагружения /пунктир/. Подобие треугольников позволяет составить два уравнения перемещений:

$$\frac{\Delta l_1 - \Delta l_3}{3a} = \frac{\Delta l_1 - \Delta l_4}{a} \quad \text{и}$$

$$\frac{\Delta l_2 - \Delta l_1}{2a} = \frac{\Delta l_3 - \Delta l_4}{a}.$$

$$\text{Учитывая, что } \Delta l_i = \frac{N_i l}{EF},$$

приводим уравнения к виду

$$N_1 - 3N_3 + 2N_4 = 0, \quad /3/$$

$$N_2 - 2N_3 + N_4 = 0. \quad /4/$$

Решая совместно уравнения /1/ - /4/, находим продольные

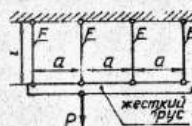


Рис. 34

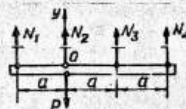


Рис. 34

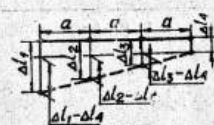


Рис. 35

$$\text{силы } N_1 = \frac{4}{10}P, N_2 = \frac{3}{10}P, N_3 = \frac{2}{10}P, N_4 = \frac{1}{10}P.$$

Допускаемая сила P определяется из условия прочности:

$$\sigma_{\max} \leq [\sigma]. \text{ Наибольшее нормальное напряжение: } \sigma_{\max} = \frac{N_1}{F} = \frac{4P}{10F},$$

$$\text{следовательно, } \frac{4P}{10F} \leq \frac{\sigma_{\text{тр}}}{n_T} \text{ и } P \leq \frac{10F\sigma_{\text{тр}}}{4n_T}.$$

Наибольшее допускаемое значение силы

$$P = \frac{10F\sigma_{\text{тр}}}{4n_T} = \frac{10 \cdot 500 \cdot 400}{4 \cdot 2} = 250000 \text{ Н} = 250 \text{ кН}.$$

Это значение на 48% выше результата, полученного в задаче 5.

ЗАДАЧА 10. Жесткий брус имеет вращательный опор. O и соединен с двумя стальными стержнями 1 и 2 (рис. 33). Фактическая длина стержня 2 оказалась меньше проектной длины $3l$ на величину $\delta = 0,001 l$. Каковы величины нормальных напряжений, возникающих в стержнях после сборки системы? Принять и модуль упругости первого рода равным $2 \cdot 10^5$ МПа.

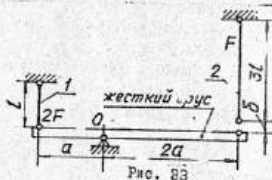


Рис. 33

Решение. После сборки системы жесткий брус AB займет новое положение A_1B_1 (рис. 34). Стержни 1 и 2 получат удлинения Δl_1 и Δl_2 .

Продольные силы, возникающие в растянутых стержнях, обозначим N_1 и N_2 .

$$\text{Уравнения равновесия: } \Sigma P_y = 0, N_1 - R + N_2 = 0; \quad (1) \\ \Sigma m_{O_0} = 0, N_1 \cdot 2a - N_2 \cdot 2a = 0 \text{ или } N_1 = 2N_2. \quad (2)$$

Уравнение перемещений $\Delta O_1A_1 \approx \Delta O_1B_1$:

$$\frac{\Delta l_1}{l} = \frac{\delta + \Delta l_2}{3l},$$

$$\text{или } 2\Delta l_1 + \Delta l_2 = \delta.$$

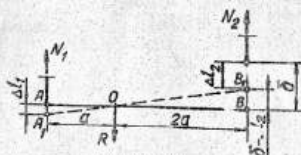


Рис. 34

$$\text{Так как } \Delta l_1 = \frac{N_1 \cdot l}{E \cdot 2F}, \Delta l_2 = \frac{N_2 \cdot 3l}{E \cdot F} \text{ и } \delta = 0,001 l, \text{ то}$$

$$2 \frac{N_1 \cdot l}{E \cdot 2F} + \frac{N_2 \cdot 3l}{E \cdot F} = 0,001 l \text{ и } N_1 + 3N_2 = 0,001 E F.$$

$$\text{Исходя из (2), находим } N_1 = \frac{EF}{2500}, N_2 = \frac{EF}{5000}.$$

Но, так как напряжения в поперечных сечениях стержней

$$\sigma_1 = \frac{N_1}{F} = \frac{EF}{2500 \cdot F} = \frac{E}{2500}, \sigma_2 = \frac{N_2}{F} = \frac{EF}{5000 \cdot F} = \frac{E}{5000},$$

следовательно, в данном случае оба стержня испытывают одинаковые напряжения.

$$\sigma = \frac{E}{5000} = \frac{2 \cdot 10^5}{5000} = 40 \text{ МПа}.$$

В последующих задачах рассмотрены симметричные статически неопределимые системы. Если симметричная в геометрическом отношении стержневая система

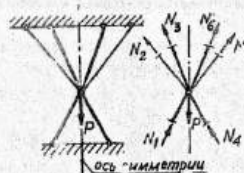


Рис. 35

находится под симметричной нагрузкой (рис. 35), то возникающие деформации будут симметричны. Это означает, что изгибения для симметрично расположенных элементов будут одинаковы и, следовательно, будут равны и продольные силы в этих элементах:

$$N_1 = N_4, N_2 = N_5, N_3 = N_6.$$

В данном примере решение задачи сводится к решению трех неизвестных сил, а не шести, как это было бы в несимметричной системе. В общем же случае число неизвестных уменьшается на число симметричных пар элементов.

ЗАДАЧА 11. Стержневая система состоит из пяти стальных стержней, имеющих одинаковые площади поперечных сечений, и нагружена силой $P = 30$ кН (рис. 36). Определить коэффициенты запаса по пределу текучести при $F = 100$ мм², $\sigma_{\text{тр}} = \sigma_{\text{тс}} = 270$ МПа.

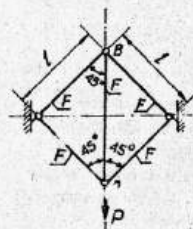


Рис. 36

Решение. Коэффициент запаса по пределу текучести

$$\eta_T = \frac{\sigma_T}{\sigma_{max}}$$

Все стержни имеют одинаковые площади поперечных сечений, поэтому

$$\sigma_{n. x} = \frac{N_{max}}{F}$$

Ведя к сдвигу, следовательно, к определению наибольшей продольной силы. Выберем узлы A и B (рис. 37) и покажем внутренние силы. В симметрично расположенных стержнях эти силы одинаковы. Направления сил выбираются, вообще говоря, произвольно. Р' можно следить за тем, чтобы соблюдалось соответствие между знаком внутренней силы N и знаком изменения длины стержня Δl . Если внутренняя сила в каком-либо стержне направлена от сечения $N > 0$, а на схеме, изображающей систему в деформированном состоянии, этот же стержень показан укороченным $\Delta l < 0$, то для компенсации возникшего несоответствия в знаках изменение длины принимают формулой

$$\Delta l = -\frac{N}{E}$$

В некоторых случаях удобнее сначала рассмотреть схему деформированного состояния системы, а затем показать внутренние силы, направляя их от сечения для стержней по направлению удлинения, и к сечению — для стержней, показанных укороченными.

На рис. 37 все внутренние силы показаны положительными. Уравнения равновесия узлов A и B:

$$\begin{aligned} \Sigma P_y = 0, \quad 2N_1 \cos 45^\circ + N_2 - P &= 0, & (1) \\ N_2 + 2N_1 \cos 45^\circ &= 0. & (2) \end{aligned}$$

Стержневая система статически неопределима. Чтобы составить уравнение перемещений, изобразим систему в деформированном состоянии (рис. 38). Так как перемещения узлов A и B незначительны по сравнению с размерами стержней, то изменения углов

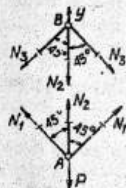


Рис. 37

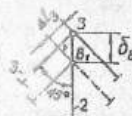


Рис. 38

между ними можно пренебречь и считать, что новое положение стержня (пунктир) параллельно начальному.

Перемещения узлов A и B связаны соответственно с удлинением стержня I и укорочением стержня 3:

$$\delta_A = \frac{\Delta l}{\cos 45^\circ}, \quad \delta_B = \frac{\Delta l_3}{\cos 45^\circ}.$$

Удлинение стержня 2 определяется разностью перемещений его конечных сечений:

$$\Delta l_2 = \delta_A - \delta_B = \frac{\Delta l_1}{\cos 45^\circ} - \frac{\Delta l_3}{\cos 45^\circ} \cdot 1/3$$

Сравнивая иловую схему (см. рис. 37) и схему перемещений (см. рис. 38), отметим, что в отличие от стержней I и 2, в которых знаки N_1 и Δl_1 , N_2 и Δl_2 одинаковы, в стержне 3 знаки N_3 и Δl_3 различны, поэтому

$$\Delta l_1 = \frac{N_1 \cdot l}{EF}, \quad \Delta l_2 = \frac{N_2 \cdot l \sqrt{2}}{EF}, \quad \Delta l_3 = -\frac{N_3 \cdot l}{EF}.$$

Подставляя эти выражения в уравнение перемещений 1/3, получаем

$$\frac{N_2 \cdot l \sqrt{2}}{EF} = \frac{N_1 \cdot l}{EF \cos 45^\circ} + \frac{N_3 \cdot l}{EF \cos 45^\circ}$$

$$\text{или } N_2 = N_1 + N_3 = 0, \quad (4)$$

Решая систему уравнений 1/1, 1/2, 1/4, находим продольные силы:

$$N_1 = 0,50 P, \quad N_2 = 0,25 P, \quad N_3 = -0,25 P$$

Знак минус свидетельствует о том, что действительные направления сил N_3 противоположно указанному на рис. 37.

Наибольшее напряжение

$$\sigma_{max} = \frac{N_{max}}{F} = \frac{N_1}{F} = \frac{0,50 \cdot 30 \cdot 10^3}{100} = 150 \text{ МПа}.$$

Коэффициент запаса по пределу текучести

$$\eta_T = \frac{\sigma_T}{\sigma_{max}} = \frac{270}{150} = 1,8.$$

ЗАДАЧА 12. Определить напряжения в стальных стержнях $E = 2 \cdot 10^5$ МПа, $\alpha = 12 \cdot 10^{-6}$ 1/град, вызванные повышением температуры стержневой системы (рис. 39) на $\Delta t = 50^\circ \text{C}$.

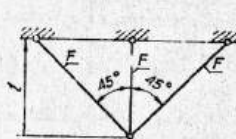


Рис. 39

Решение. Предположим, что во всех элементах системы внутренние силы положительны. Учитывая, что симметрично расположенные элементы нагружены одинаково (рис. 40), составим уравнение равновесия:

$$\Sigma P_y = 0, \quad 2N_1 \cos 45^\circ + N_2 = 0, \\ \text{или } \sqrt{2} \cdot l_1 + l_2 = 0. \quad (I)$$

В дополнение к полученному единственному уравнению равновесия составим уравнение перемещений. На рис. 41 показано положение системы после повышения температуры.

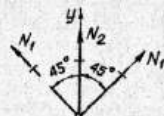


Рис. 40

Перемещение узла AA_1 весьма мало по сравнению с длинами стержней и, следовательно, можно пренебречь незначительными изменениями углов между стержнями. Стрелки Δl_1 и Δl_2 , изображающие удлинения стержней, образуют соответственно катет и гипотенузу прямоугольного треугольника, поэтому

$$\Delta l_1 = \Delta l_2 \cdot \cos 45^\circ \quad \text{или} \quad \sqrt{2} \Delta l_1 = \Delta l_2.$$

$$\text{Так как } \Delta l_1 = \alpha \frac{l_1}{\cos 45^\circ} \Delta t + \frac{N_1 \cdot l_1 \cos 45^\circ}{EF} =$$

$$= \alpha \sqrt{2} \Delta t + \frac{N_1 \cdot l \sqrt{2}}{EF},$$

$$\Delta l_2 = \alpha \cdot l \cdot \Delta t + \frac{N_2 \cdot l}{EF}.$$

то удлинение перемещений получает вид:

$$\sqrt{2} \left(\alpha \sqrt{2} \Delta t + \frac{N_1 \cdot l \sqrt{2}}{EF} \right) = \alpha l \Delta t + \frac{N_2 \cdot l}{EF}$$

$$\text{или } N_2 = 2N_1 + \alpha \Delta t \cdot EF.$$

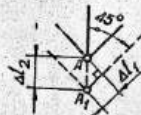


Рис. 41

Решая совместно уравнения (I) и (II), находим продольные силы:

$$N_1 = - \frac{\alpha \Delta t \cdot EF}{2 + \sqrt{2}}, \quad N_2 = \frac{\sqrt{2} \alpha \Delta t \cdot EF}{2 + \sqrt{2}}.$$

Знак минус показывает, что N_1 имеет направление, противоположное изображенному на рис. 40. Следовательно, при повышении температуры вертикальных стержней l происходит растяжение, наклонные стержни — сжатие.

Нормальные напряжения в поперечных сечениях стержней:

$$\sigma_1 = \frac{N_1}{F} = - \frac{\alpha \Delta t \cdot E}{2 + \sqrt{2}} = - \frac{12 \cdot 10^{-6} \cdot 50 \cdot 2 \cdot 10^5}{2 + \sqrt{2}} \approx - 35 \text{ МПа},$$

$$\sigma_2 = \frac{N_2}{F} = \frac{\sqrt{2} \alpha \Delta t \cdot E}{2 + \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2} \cdot 12 \cdot 10^{-6} \cdot 50 \cdot 2 \cdot 10^5}{2 + \sqrt{2}} \approx 50 \text{ МПа}.$$

ЗАДАЧА 13. Определить напряжения в поперечных сечениях стержней и найти перемещение узла A при $P = 50$ кН (рис. 43). Стержни имеют круглое сечение диаметром $d = 16$ мм, $l = 250$ мм, $E = 2 \cdot 10^5$ МПа.

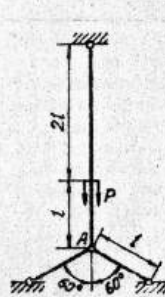


Рис. 43

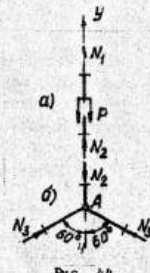


Рис. 44

Решение. Обозначим внутренние силы в поперечных сечениях верхнего и нижнего участков вертикального стержня соответственно N_1 и N_2 ; силы в симметрично расположенных наклонных стержнях обозначим N_3 (рис. 44).

Уравнения равновесия $\Sigma P_y = 0$ для вертикального участка (см. рис. 44 а): $N_1 - N_2 = 0$;

рис. 44 б).

а для узла A (см. рис. 44 в):

$$2N_3 \cos 60^\circ - N_2 = 0. \quad \text{Это дает две зависимости}$$

между искомыми силами: $N_1 + N_2 = P,$

$$N_2 = N_3.$$

(I)

(II)

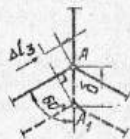


Рис. 3

Третья зависимость получим, рассмотрев перемещение узла А. На рис. 45 пунктиром показано положение стержней после нагружения системы силой Р. Перемещение $\delta = AA_1$ представляет собой изменение длины вертикального стержня, т.е. алгебраическую сумму изменений длин верхнего и нижнего участков:

$$\delta = \frac{N_1 \cdot 2l}{EF} - \frac{N_2 \cdot l}{EF}, \text{ где } F = \frac{\pi d^2}{4}.$$

Укорочение наклонного стержня Δl_1 и перемещение δ образуют катет и гипотенузу прямоугольного треугольника, следовательно, $\Delta l_1 = \delta \cdot \cos 60^\circ$.

$$\frac{N_1 \cdot l}{EF} = \left(\frac{N_1 \cdot 2l}{EF} - \frac{N_2 \cdot l}{EF} \right) \cdot 0,5, \quad 2N_1 - N_2 - 2N_3 = 0. \quad /1/$$

Решая совместно уравнения равновесия /1/, /2/ и уравнение перемещения /3/, находим

$$N_1 = \frac{3}{5}P, \quad N_2 = N_3 = \frac{2}{5}P.$$

Площадь поперечного сечения

$$F = \frac{\pi d^2}{4} = \frac{\pi \cdot 16^2}{4} = 200 \text{ мм}^2.$$

Нормальные напряжения в поперечных сечениях стержней:

$$\sigma_1 = \frac{N_1}{F} = \frac{3P}{5F} = \frac{3 \cdot 50 \cdot 10^3}{5 \cdot 200} = 150 \text{ МПа},$$

$$\sigma_2 = \sigma_3 = \frac{N_2}{F} = \frac{2P}{5F} = \frac{2 \cdot 50 \cdot 10^3}{5 \cdot 200} = 100 \text{ МПа}.$$

Перемещение узла А

$$\delta = \frac{N_1 \cdot 2l}{EF} - \frac{N_2 \cdot l}{EF} = \frac{3P \cdot 2l}{5EF} - \frac{2Pl}{5EF} = \frac{4Pl}{5EF} = \frac{4 \cdot 50 \cdot 10^3 \cdot 250}{5 \cdot 2 \cdot 10^5 \cdot 200} = 0,25 \text{ мм}.$$

ЗАДАЧА 14. Система стальных стержней нагружена силой $P = 150 \text{ кН}$. Определить коэффициент запаса по пределу текучести при $\sigma_{\text{тр}} = \sigma_{\text{тс}} = 400 \text{ МПа}$, $F = 100 \text{ мм}^2$, $\alpha = 30^\circ$, $\beta = 60^\circ$, $\gamma = 45^\circ$ (рис. 46).

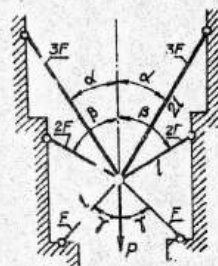


Рис. 46

Решение. Выделим нагруженный узел В и укажем направления внутренних сил (рис. 47, учитывая, что при перемещении узла В по направлению силы Р длины стержней 1 и 2 увеличатся, а длина стержня 3 уменьшится).

Величины сил в симметричных элементах системы будут одинаковы, что следует, как указывалось выше, из равенства изменений длин этих элементов.

Уравнение равновесия узла В

$$\sum P_y = 0, \quad 2N_1 \cos \alpha + 2N_2 \cos \beta + 2N_3 \cos \gamma - P = 0. \quad /1/$$

Для решения задачи необходимо получить еще два уравнения. С этой целью рассмотрим перемещение узла В и найдем зависимость между изменениями длин стержней 1, 2 и 3.

В рис. 48 а положения стержней после нагружения системы силой Р показаны пунктиром, изменения Δl_i длин стержней изображены толстыми линиями. Эти же изменения длин каждого стержня отдельно представлено на рис. 48 б, в, г. Отрезки Δl_1 , Δl_2 и Δl_3 образуют катеты прямоугольных треугольников с общей гипотенузой $\delta = BB_1$, поэтому

$$\delta = \frac{\Delta l_1}{\cos \alpha} = \frac{\Delta l_2}{\cos \beta} = \frac{\Delta l_3}{\cos \gamma}.$$

Так как $\Delta l_1 = \frac{N_1 \cdot 2l}{E \cdot 3F}$, $\Delta l_2 = \frac{N_2 \cdot l}{E \cdot 2F}$ и $\Delta l_3 = \frac{N_3 \cdot l}{E \cdot F}$, то

$$\frac{N_1 \cdot 2l}{E \cdot 3F \cdot \cos \alpha} = \frac{N_2 \cdot l}{E \cdot 2F \cdot \cos \beta} \quad \text{или} \quad 1N_1 \cos \beta - 3N_2 \cos \alpha = 0, \quad /1/$$

$$\frac{N_1 \cdot 2l}{E \cdot 3F \cdot \cos \alpha} = \frac{N_3 \cdot l}{E \cdot F \cdot \cos \gamma} \quad \text{или} \quad 2N_1 \cos \gamma - 3N_3 \cos \alpha = 0. \quad /2/$$

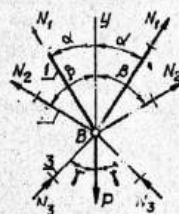


Рис. 47

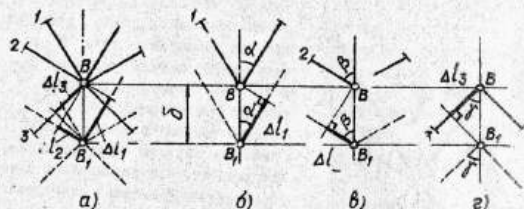


Рис. 48

Решив систему уравнений $N_1 - N_3 = 0$, найдем

$$N_1 = 0,806P = 0,806 \cdot 150 = 45,9 \text{ кН},$$

$$N_2 = 0,235P = 0,235 \cdot 150 = 35,3 \text{ кН},$$

$$N_3 = 0,167P = 0,167 \cdot 150 = 25,1 \text{ кН}.$$

Знаки плюс указывают, что действительные направления внутренних сил совпадают с изображенными на рис. 47, т.е., как и предполагалось, стержни 1 и 2 испытывают растяжение, стержни 3 - сжатие.

Для проверки полученных результатов убедимся, что работа силы P и потенциальная энергия деформации стержневой системы одинаковы.

$$\begin{aligned} \text{Работа силы } P: A &= \frac{1}{2} P \cdot \delta; \text{ так как } \delta = BB_1 = \frac{\Delta l_3}{\cos \gamma} = \\ &= \frac{N_3 l}{EF \cos \gamma} = \frac{0,167 Pl}{EF \cos 45^\circ}, \\ \text{то } A &= \frac{1}{2} P \cdot \frac{0,167 Pl}{EF \cos 45^\circ} = 0,118 \frac{P^2 l}{EF}. \end{aligned}$$

Потенциальная энергия деформации

$$\begin{aligned} U &= 2 \sum_{i=1}^3 \frac{N_i^2 l_i}{2EF_i} = 2 \left(\frac{N_1^2 l}{2E \cdot 3F} + \frac{N_2^2 l}{2E \cdot 2F} + \frac{N_3^2 l}{2E \cdot F} \right) = \\ &= 2 \left[\frac{(0,806P)^2 l}{2E \cdot 3F} + \frac{(0,235P)^2 l}{2E \cdot 2F} + \frac{(0,167P)^2 l}{2E \cdot F} \right] = 0,118 \frac{P^2 l}{EF}. \end{aligned}$$

Совпадение значений A и U подтверждает достоверность

найденных величин N_1, N_2 и N_3 .

Напряжения в поперечных сечениях стержней:

$$\sigma_1 = \frac{N_1}{3F} = \frac{45,9 \cdot 10^3}{3 \cdot 100} = 158 \text{ МПа. /растяжение/}$$

$$\sigma_2 = \frac{N_2}{2F} = \frac{35,3 \cdot 10^3}{2 \cdot 100} = 177 \text{ МПа. /растяжение/}$$

$$\sigma_3 = \frac{N_3}{F} = \frac{25,1 \cdot 10^3}{100} = 251 \text{ МПа. /сжатие/}$$

Коэффициент запаса по пределу текучести.

$$n_T = \frac{\sigma_T}{\sigma_{max}} = \frac{\sigma_{TC}}{\sigma_3} = \frac{400}{251} = 1,6.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Феодосьев В.М. Сопротивление материалов. - М.: Наука, 1979, с. 23-76.
2. Газарли А.С., Киселев Г.П., Сухов В.А. Расчетно-графические работы по сопротивлению материалов. Растяжение - сжатие. М.: МВТУ, 1980. - 42 с.

Корректор Н.Н.Филимонов

Заклз 383	Объем 2л.л.(2уч.-изд.л.)	Тираж 700экз.
Бесплатно	Подписано к печати 26.II.84 г.	План 1984 г., № 72

Типографи. МВТУ. 107006. Москва, Б-5. 2-я Бауманская, 5.