

Цена 10 коп.

№ 1  
5-881

Министерство высшего и среднего специального образования СССР

Московское  
ордена Ленина и ордена Трудового Красного Знамени  
высшее техническое училище имени Н. Э. Баумана

К. Е. БОРОВКОВА, Л. В. БУБНОВА, Г. Г. ТЕЛЕПНЕВА

РАСЧЕТ СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМЫХ СИСТЕМ

Учебное пособие

Москва

1977

### Введение

В данной работе рассматривается методика определения внутренних силовых факторов и перемещений статически неопределимых рамных конструкций, работающих в пределах упругих деформаций. Вопросы прочности здесь не затрагиваются. Кроме того, предполагается, что отдельные элементы рамных конструкций под действием внешних нагрузок не теряют устойчивость.

В машиностроении часто встречаются конструкции, состоящие из элементов, имеющих форму бруса. Это могут быть рамы или фермы. Система брусьев, образующих ферму или раму, должна быть геометрически неизменяемой, т.е. при условии абсолютной жесткости самих элементов их перемещения относительно друг друга или относительно опорных закреплений при нагружении не должны иметь места. В геометрически неизменяемой системе перемещения отдельных элементов рамы или фермы возможны только за счет деформаций рассматриваемого элемента или других элементов.

Рамы и фермы могут быть статически определимые и статически неопределимые. Под статически ~~не~~определимой понимается такая система, для которой все реакции опор могут быть определены при помощи уравнений равновесия, а затем при найденных опорных реакциях методом сечений могут быть вычислены также и внутренние силовые факторы в любом поперечном сечении. Под статически неопределимой системой понимается система, для которой определение внешних реакций и внутренних силовых факторов не может быть произведено при помощи уравнений равновесия и метода сечений. Разность между числом неизвестных (внутренних силовых факторов и реакций опор) и числом независимых уравнений равновесия определяет степень статической неопределимости системы.

Иногда говорят, что степень статической неопределимости равна числу дополнительных связей, наложенных на систему. Останемся на этом вопросе подробнее.

Положение жесткого бруса в пространстве определяется шестью независимыми координатами, иначе говоря, жесткий брус обладает шестью степенями свободы. На брус могут быть наложены связи, т.е. ограничения, обуславливающие его определенное положение в пространстве. Наиболее простыми связями являются такие, при которых полностью исключается то или иное обобщенное перемещение для некоторых сечений бруса. Наложение одной связи снимает одну степень свободы с бруса, как жесткого целого. Следовательно, если на свободный жесткий брус наложено шесть свя-

зей, то положение его в пространстве как жесткого целого будет определено полностью, и система из механизма, обладающего шестью степенями свободы, превращается в кинематически неизменяемую систему. То число связей, при котором достигается кинематическая неизменяемость, носит название необходимого числа связей. Всякую связь, наложенную сверх необходимых, называют дополнительной. Число дополнительных связей равно степени статической неопределимости системы.

Введение дополнительных связей приводит к увеличению жесткости системы. Рациональным подбором жесткостей отдельных элементов можно добиться наиболее выгодного распределения внутренних сил по элементам конструкции, что является основной отличительной особенностью статически неопределимых систем.

Вторая отличительная особенность систем с дополнительными связями заключается в возникновении "температурных напряжений" в сечениях элементов конструкций при нагревании системы. Это объясняется тем, что дополнительные связи препятствуют свободному температурному расширению при нагревании системы.

Третья отличительная особенность статически неопределимых систем состоит в том, что при неточности изготовления какого-либо элемента в конструкции возникают так называемые предварительные (сборочные) напряжения. Последние в ряде случаев могут облегчить работу элементов конструкции в эксплуатационных условиях, разгружая отдельные ее части.

Связи в рамах и стержневых системах делятся обычно на внешние и внутренние, или взаимные. Под внешними связями понимаются условия, накладываемые на абсолютные перемещения некоторых точек системы. Если, например, в сечении В рамы (рис. 1а) наложено условие, запрещающее вертикальное перемещение, говорят, что в этой точке имеется одна внешняя связь (каток), если запрещено как вертикальное, так и горизонтальное смещение (рис. 1а, сечение А), говорят, что наложены две внешние связи (шарнир). Заделка в плоской системе исключает вертикальное и горизонтальное перемещения, а также угол поворота, т.е. накладывает три связи.

Под внутренними или взаимными связями понимаются ограничения, накладываемые на взаимные смещения элементов рамы.

Рассмотрим, например, плоскую раму (рис. 1а). Эта рама статически определима и геометрически неизменяема. Действительно, две реакции в шарнире А и одна в катке В могут быть определены из трех независимых уравнений статики для плоской рамы.

После нахождения опорных реакций, применяя метод сечений, можно определить внутренние силовые факторы в любом сечении рамы. Добавим к трем линейным внешним связям, наложенным на систему, еще две дополнительные внутренние связи, запрещающие взаимное вертикальное и горизонтальное смещение точек D и К (рис. 1б). Рама в этом случае будет дважды статически неопределима (иногда добавляют "внутренним образом"). Исключим возможность углового перемещения сечений D относительно К введением дополнительной внутренней угловой связи (рис. 1в). В результате получим замкнутый контур DKCLW, который будет три раза внутренне статически неопределим. Если разрезать раму в каком-либо сечении в пределах замкнутого контура DKCLW, то в этом сечении возникнут три внутренних силовых фактора: изгибающий момент M, поперечная сила Q и нормальная сила N (рис. 1г). Эти внутренние силовые факторы не могут быть определены из уравнений равновесия. Следовательно, замкнутый контур рамы три раза внутренне статически неопределим.

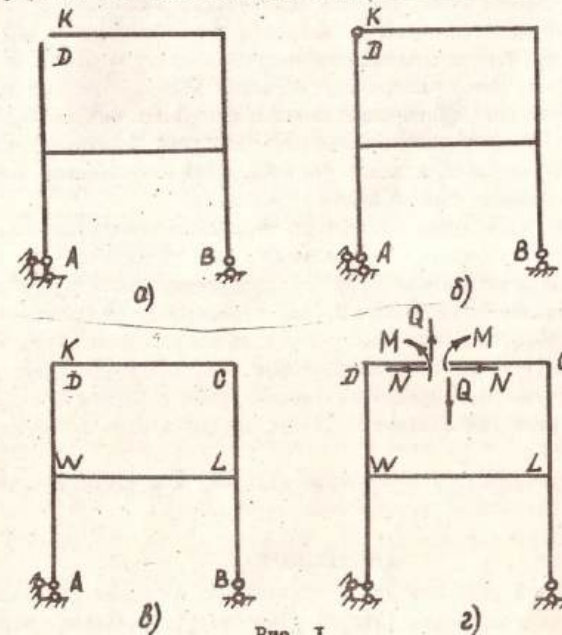


Рис. I

### Метод сил

Одним из методов раскрытия статической неопределимости стержневых и рамных систем является метод сил. Он состоит в том, что заданная статически неопределимая система освобождается от дополнительных внешних и внутренних связей, после чего она превращается в статически определимую. Действие отброшенных дополнительных связей заменяется неизвестными силовыми факторами. Величина их определяется из условия равенства нулю абсолютных или относительных перемещений данной системы в направлении этих отброшенных связей.

Решение любой статически неопределимой системы начинается с выяснения ее статической неопределимости. После этого необходимо для решения задачи выбрать основную систему. Основной системой называется статически определимая геометрически неизменяемая система, полученная из заданной путем отбраковки лишних внешних и внутренних связей и снятия всей нагрузки. Число отброшенных связей равно степени статической неопределимости. Для одной и той же статически неопределимой системы можно выбрать несколько вариантов основных систем. К выбранной основной системе приложим вместо отброшенных связей неизвестные силовые факторы, а также действующие внешние нагрузки. Полученная таким образом статически определимая система будет эквивалентна заданной статически неопределимой системе, если перемещения в направлении отброшенных связей будут равны нулю.

Перемещения будем определять с помощью интеграла Мора. При этом влиянием нормальных и поперечных сил на величину перемещений будем пренебрегать, так как вызываемые ими в рамах и балках перемещения значительно меньше перемещений от изгибающих и крутящих моментов. Исключение составят только фермы, где единственным внутренним силовым фактором является нормальная сила. Следовательно, при определении перемещений в фермах с помощью интеграла Мора необходимо будет учитывать только нормальные силы.

На ряде примеров рассмотрим методику и последовательность решения статически неопределимых систем.

### Плоские рамы

У плоской рамы оси всех составляющих ее элементов расположены в одной плоскости, которая одновременно является главной плоскостью всех сечений. В этой же плоскости действуют и внешние силы, включая реакции опор.

**Пример I.** Построить эпюры изгибающих моментов для рамы, изображенной на рис. 2а. Все элементы системы имеют одинаковую жесткость  $EJ_x$ .

На раму наложены 4 внешних связи. Следовательно, рама статически неопределима один раз. Отбрасывая одну из связей, получим основную систему.

Следует отметить, что для одной и той же заданной статически неопределимой системы можно выбрать несколько основных систем. При раскрытии статической неопределимости необходимо стремиться к тому, чтобы выбранная основная система была наиболее рациональной с точки зрения простоты эпюр внутренних силовых факторов. Если задана симметричная система с симметричной или кососимметричной нагрузкой, то эту особенность нагружения необходимо использовать при выборе основной системы.

В данном примере будут рассмотрены две основные системы. В качестве первой основной системы возьмем систему с отброшенной горизонтальной связью в сечении А (рис. 2б). Действие отброшенной связи заменим силой  $X_1$  (рис. 2в). Если горизонтальное перемещение сечения А будет равно нулю, то система, показанная на рис. 2в, будет эквивалентной. Используя равенство нулю перемещения сечения А в горизонтальном направлении, запишем каноническое уравнение метода сил в следующем виде:

$$\delta_{11} X_1 + \delta_{1p} = 0,$$

где  $\delta_{11}$  — перемещение в направлении I от силы, равной I, действующей в том же направлении, т.е. в горизонтальном направлении;

$\delta_{1p}$  — перемещение в направлении I от внешних сил.

Очевидно, что сумма  $\delta_{1p}$  и  $\delta_{11} X_1$  представляет полное перемещение в горизонтальном направлении сечения А, а оно равно нулю, так как это перемещение в направлении отброшенной связи.

Для вычисления коэффициентов канонического уравнения  $\delta_{11}$  и  $\delta_{1p}$  построим эпюры изгибающих моментов для основной системы от заданной нагрузки  $M_p$  и от единичной силы  $X_1 = 1$  (рис. 2г, д). Перемножив эти эпюры по способу Верещагина, получим:

$$EJ_x \delta_{11} = 2 \left( \frac{1}{2} \cdot \frac{\ell}{2} \cdot \ell \right) \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{\ell}{2} + 2 \left( \frac{1}{2} \cdot \frac{\ell}{2} \cdot \frac{\ell}{2} \right) \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{\ell}{2} = \frac{\ell^3}{4} \text{ см}^3$$
$$EJ_x \delta_{1p} = -2 \left( \frac{1}{2} \cdot \frac{q \ell^2}{4} \cdot \ell \right) \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{\ell}{2} + 2 \left( \frac{1}{2} \cdot \frac{q \ell^2}{4} \cdot \frac{\ell}{2} \right) \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{\ell}{2} = -\frac{q \ell^4}{8} \text{ кгс} \cdot \text{см}^3$$

Тогда значение неизвестной силы  $X_1$  будет:

$$X_1 = -\frac{\delta_{1p}}{\delta_{11}} = \frac{q \ell}{2} \text{ кгс}.$$

Суммарную эпюру изгибающих моментов можно получить или

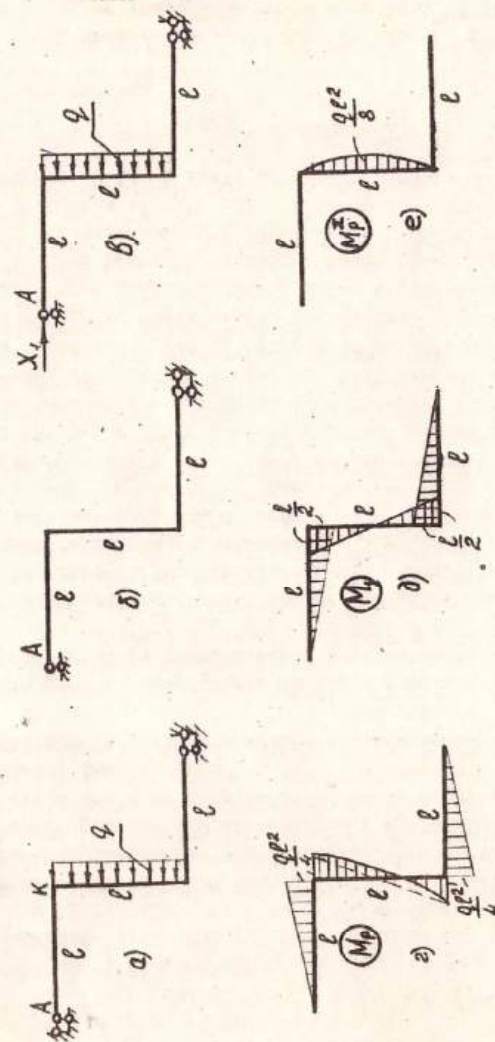


Рис. 2

непосредственным построением в эквивалентной системе (после определения всех реактивных сил) или путем сложения ординат эпюры от заданной нагрузки  $M_p$  и ординат эпюры единичной силы  $M_1$ , увеличенных в  $X_1$  раз (рис. 2г, д). Суммарная эпюра изгибающих моментов  $M_p^x$  изображена на рис. 2е.

Рассмотрим для этой же задачи другой вариант основной системы (рис. 3 а). Эквивалентная система и эпюры изгибающих моментов от внешней нагрузки и от единичной силы приведены соответственно на рис. 3 б, в, г. Так как  $\delta_{1p} = 0$ , то суммарная эпюра изгибающих моментов будет такой же, как эпюра только от внешней нагрузки (рис. 3 в).

Рассмотренный пример показывает, насколько удачный выбор основной системы упрощает решение задачи.

Совпадение суммарных эпюр изгибающих моментов, полученных путем использования для решения различных основных систем, указывает на правильность решения задачи.

#### Определение перемещений

Определение перемещения с помощью интеграла Мора (графо-аналитическим способом Верещагина А.Н.), как известно, состоит в перемножении эпюр изгибающих моментов от внешней нагрузки и от единичного силового фактора, приложенного к заданной системе в направлении искомого перемещения. При определении перемещения заданной статически неопределимой системы для построения эпюры изгибающих моментов от единичного силового фактора необходимо заново раскрыть статическую неопределимость системы. Такой метод определения перемещений, хотя и правилен, но нецелесообразен ввиду своей сложности.

Можно упростить определение перемещений в статически неопределимой системе, используя для этого статически определимую эквивалентную систему, перемещения которой такие же, как и у заданной системы. Так как эквивалентная система статически определима, то построение эпюры изгибающих моментов от единичного силового фактора, приложенного к ней для определения перемещения, никаких затруднений не вызовет. Необходимо заметить, что для определения перемещений можно использовать любую возможную эквивалентную систему. При этом надо выбирать такую оптимальную эквивалентную систему, при которой перемножение эпюр будет наиболее простым.

Итак, определим угол поворота сечения К, используя эквивалентную систему, показанную на рис. 2 в. Для этого снимем


$$\theta_K = \frac{1}{E J_x} \left( \frac{q l^3}{12} \right) \cdot \frac{1}{2} = \frac{q l^3}{24 E J_x} \text{ рад.}$$
$$Q_k = \frac{1}{E \gamma_x} \left( \frac{q l^3}{12} \right) \cdot \frac{1}{2} = \frac{q l^3}{24 E \gamma_x} \text{ pag.}$$

В качестве контроля правильности решения задачи может быть использован еще и следующий прием: после построения суммарной эпюры изгибающих моментов ее умножат на единичную эпюру изгибающих моментов для любой произвольно выбранной основной системы. При таком перемножении определяется перемещение в направлении лишней связи. Так как это перемещение равно нулю, то при правильном решении задачи результат перемножения должен быть равным нулю.

Итак, существуют три способа проверки решения статически неопределимых систем.

1. Решения задачи, полученные с использованием двух различных основных систем, должны быть одинаковыми.
2. Перемещения одного и того же сечения, вычисленные для различных эквивалентных систем, должны быть равными.
3. Перемещение в направлении любой отброшенной лишней связи, вычисленное перемножением суммарной эпюры изгибающих моментов на единичную эпюру изгибающих моментов для любой произвольной выбранной основной системы, должно быть равно нулю.

**Пример 2.** Построить эпюру изгибающих моментов для рамы, представленной на рис. 4а. Все элементы системы имеют одинаковую жесткость  $EJ_x$ .

Заданная рама три раза статически неопределима: один раз внешне (4 опорных связи) и 2 раза внутренне (замкнутый контур с одним шарниром). Основная и эквивалентная системы показаны



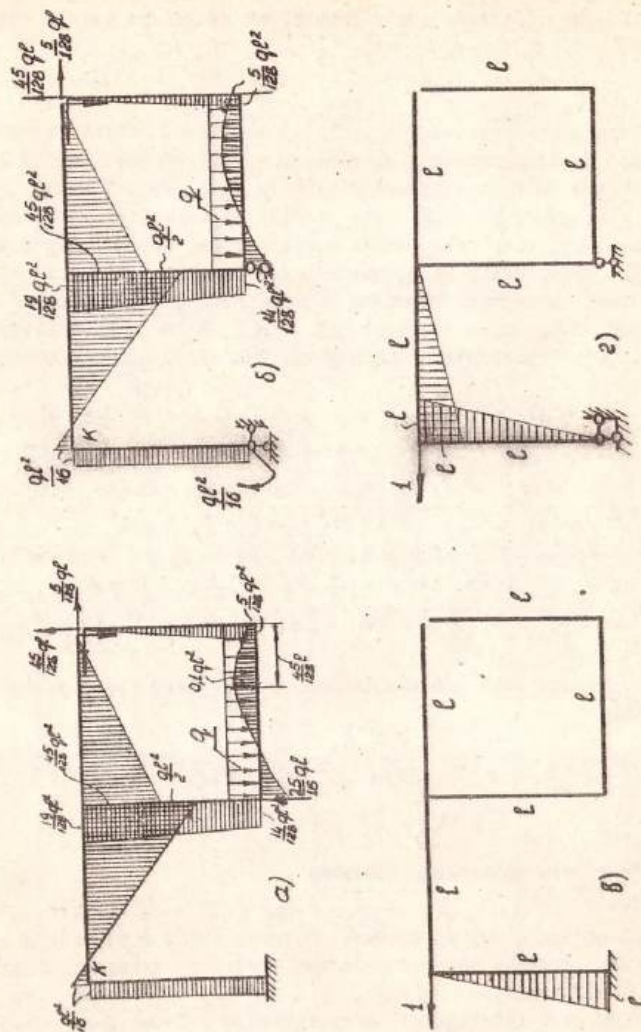


Рис. 5

единичной силы, приложенной в сечении  $K$ , для этих эквивалентных систем показаны на рис. 5в,г.

Перемещение сечения  $K$  соответственно для эквивалентной системы (рис. 5в) и (рис. 5б) будут:

$$\delta_{K\text{гор}} = \frac{1}{EJ_x} \left( \frac{ql^2}{16} \cdot l \right) \cdot \frac{l}{2} = \frac{ql^4}{32EJ_x} \text{ см};$$

$$\delta_{K\text{гор}} = \frac{1}{EJ_x} \left[ \left( \frac{1}{2} l \cdot l \right) \frac{ql^2}{16} + \left( \frac{1}{2} l \cdot l \right) \left( -\frac{2}{3} \cdot \frac{ql^2}{16} + \frac{1}{3} \cdot \frac{32}{64} ql^2 \right) \right] = \frac{ql^4}{32EJ_x} \text{ см}.$$

Перемещения получились одинаковые, следовательно, задача решена правильно.

#### Использование свойств симметрии при раскрытии статической неопределимости

Если задана симметричная в геометрическом отношении рама (рис. 6), то при расчете таких рам оказывается возможным упростить решение задачи.

Рассмотрим случаи нагружения такой рамы симметричными и кососимметричными нагрузками. Под симметричной нагрузкой будем понимать такую, при которой все внешние силы, приложенные к правой половине рамы, являются зеркальным отображением сил, приложенных к левой половине (рис. 7). Под кососимметричной нагрузкой будем понимать такую, при которой силы, приложенные к правой половине рамы, также являются зеркальным отображением сил, приложенных к левой половине, но противоположными им по знаку (рис. 8). Аналогично можно классифицировать и внутренние силовые факторы. В правой и левой плоскостях произвольного сечения (рис. 9) силы и моменты соответственно равны между собой.  $M_x, M_y$  — изгибающие моменты и  $N$  — нормальная сила являются симметричными внутренними силовыми факторами;  $M_{кр}$  — крутящий момент,  $Q_y$  и  $Q_x$  — поперечные силы — кососимметричными силовыми факторами.

Симметричная система относительно геометрической оси симметрии деформируется симметрично. При такой деформации в сечении по оси симметрии могут возникнуть только симметричные внутренние силовые факторы, а кососимметричные внутренние силовые факторы будут равны нулю.

Аналогично в кососимметричной системе в сечении по оси симметрии будут равны нулю симметричные внутренние силовые факторы.

**Пример I.** Для рамы, изображенной на рис. 10а, построить эпюру изгибающих моментов. Все элементы рамы имеют одинаковую жесткость  $EJ_x$ . Определить относительное перемещение сечений  $A-A$ .

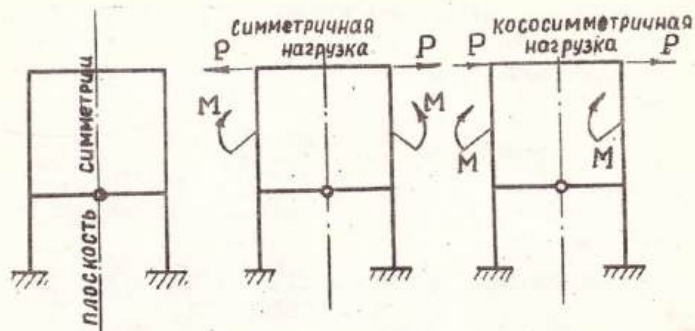


Рис. 6

Рис. 7

Рис. 8

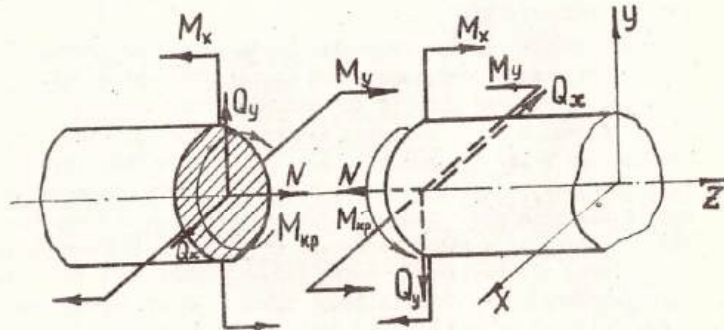


Рис. 9

Проверить решение.

Рама три раза статически неопределима. Рациональный вариант основной системы получим, разрезав раму по диагонали в сечении, где приложен момент. На эквивалентной системе разделим момент пополам, как показано на рис. 10б. Относительно этого сечения нагрузка кососимметрична, следовательно, симметричные силовые факторы будут равны нулю. Остается неизвестной сила, которую обозначим  $X_1$ .

Каноническое уравнение будет иметь вид:

$$\delta_{11} X_1 + \delta_{1P} = 0.$$

Эпюры изгибающих моментов от внешней нагрузки и от единичных сил в направлении  $X_1$  представлены на рис. 10в и 10г.

Перемножая эпюры изгибающих моментов, определяем коэффициенты канонического уравнения:

$$\delta_{1P} = -\frac{4}{EJ_x} \left( \frac{M}{2} \cdot l \right) \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} l = -\frac{\sqrt{2}}{2} \frac{M l^2}{EJ_x} \text{ см},$$

$$\delta_{11} = \frac{4}{EJ_x} \left( \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} l \cdot l \right) \frac{2}{3} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} l = \frac{2}{3} \frac{l^3}{EJ_x} \text{ см/мм}$$

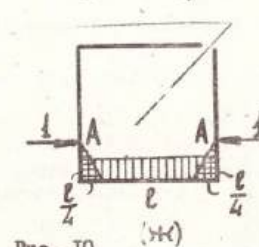
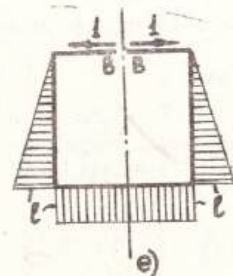
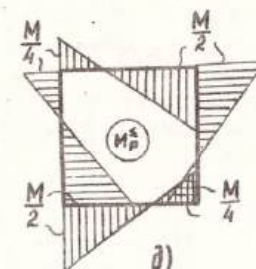
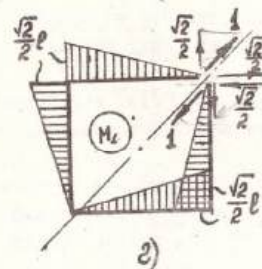
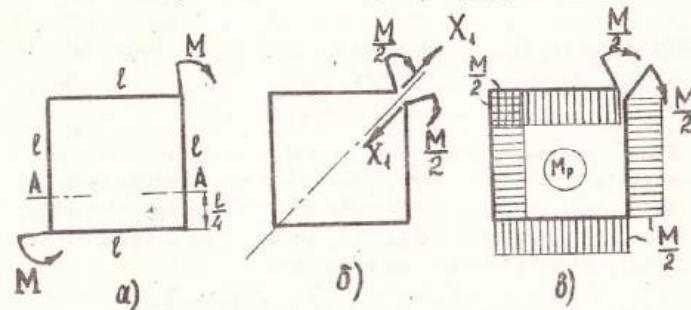


Рис. 10

Значение неизвестной силы

$$X_1 = \frac{3}{4} \sqrt{2} \frac{M}{l}.$$

Суммарную эпюру изгибающих моментов (рис. 10д) получим, сложив ординаты эпюры от внешних сил с ординатами эпюры от единичного силового фактора, увеличенными в  $X_1$  раз.

Для проверки решения задачи определим относительное перемещение сечений В-В (рис. 10е) в горизонтальном направлении. Умножив эпюру изгибающих моментов на рис. 10е на эпюру изгибающих моментов на рис. 10д, получим  $\delta_{B/B} = 0$

$$\delta_{B/B} = \frac{1}{EJ} \left[ -\left(\frac{1}{2} \ell \cdot \ell\right) \frac{M}{4} + (\ell \cdot \ell) \frac{M}{8} \right] = 0!$$

Для определения относительного перемещения сечений А-А приложим в этих сечениях силы, равные единице, направленные в противоположные стороны. Перемножив суммарную эпюру изгибающих моментов на эпюру от единичных сил, приложенных в сечениях А-А (рис. 10ж), получим искомое перемещение:

$$\delta_{A/A} = \frac{1}{EJ_x} \left[ \left(\frac{1}{2} \frac{\ell \ell}{4}\right) \frac{M}{16} + \left(\frac{1}{2} \frac{\ell \ell}{4}\right) \frac{3}{16} M - \left(\frac{\ell \cdot \ell}{4}\right) \frac{M}{8} \right] = -\frac{3}{256} \frac{M \ell^2}{EJ_x} \text{ см.}$$

Знак — означает, что сечения А переместились в обратном направлении, т.е. в данном случае, расстояние между сечениями А-А увеличилось.

**Пример 2.** Для рамы, представленной на рис. 11а, построить эпюру изгибающих моментов. Жесткость всех элементов рамы одинакова и равна  $EJ_x$ .

Раме три раза статически неопределима. Рациональнее выбрать основную систему, разрезав раму по оси симметрии, относительно которой силовые факторы кососимметричны. В этом случае симметричные внутренние силовые факторы в этом сечении будут равны нулю. Основная и эквивалентные системы представлены на рис. 11б, в.

Каноническое уравнение будет иметь вид:

$$\delta_{1P} + \delta_{11} \cdot X_1 = 0.$$

Строим в основной системе эпюру от заданных нагрузок и от единичной силы, приложенной в направлении  $X_1$  (рис. 11г, д). Определяем  $\delta_{1P}$  и  $\delta_{11}$ , перемножая эпюры:

$$\delta_{1P} = \frac{1}{EJ_x} \left[ 4 \left( \frac{1}{2} P \ell \cdot \ell \right) \frac{5}{3} \ell + 2 (P \ell \cdot 2 \ell) 2 \ell \right] = \frac{34}{3} \frac{P \ell^3}{EJ_x} \text{ см};$$

$$\delta_{11} = \frac{1}{EJ_x} \left[ 4 \left( \frac{1}{2} 2 \ell \cdot 2 \ell \right) \frac{2}{3} 2 \ell + 2 (2 \ell \cdot 2 \ell) 2 \ell \right] = \frac{80}{3} \frac{\ell^3}{EJ_x} \text{ см/ммс}$$

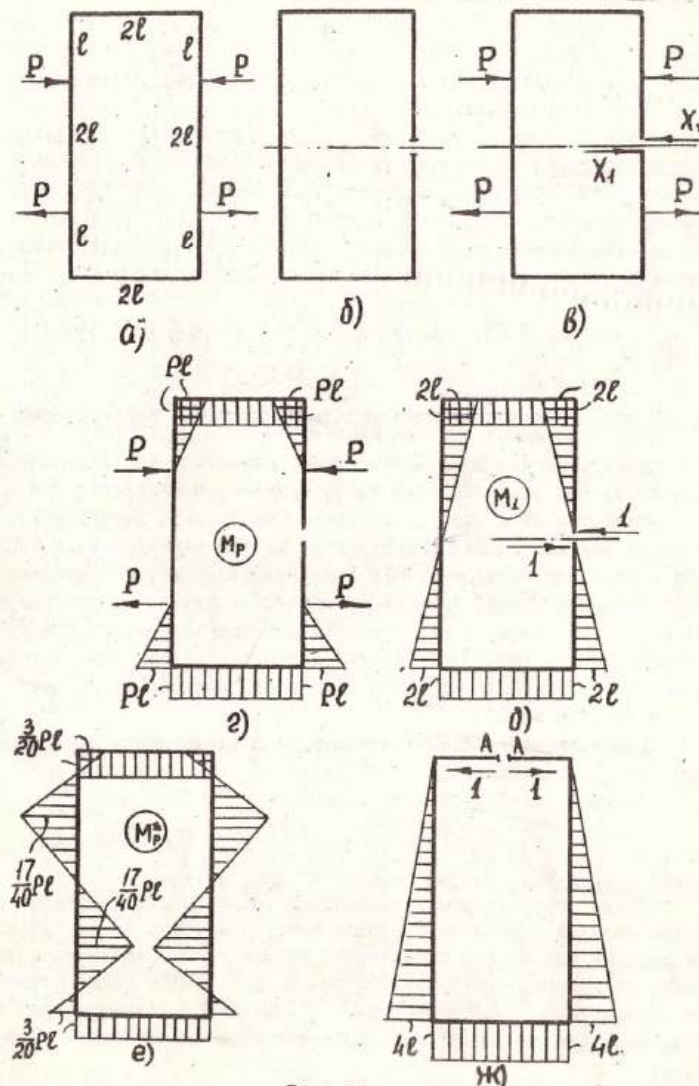


Рис. 11

$$X_1 = \frac{\delta_{12}}{\delta_{11}} = -\frac{17}{40} P.$$

Суммарную эпюру изгибающих моментов (рис. 11е) получим, сложив ординаты эпюры изгибающих моментов от заданных сил (рис. 11г) с ординатами эпюры (рис. 11д), умноженной на  $X_1$ .

Для проверки полученной эпюры моментов определим относительное перемещение сечений А-А в горизонтальном направлении. Для этого эпюру от единичного силового фактора, приложенного в направлении отброшенных относительных связей (рис. 11ж), умножим на суммарную эпюру изгибающих моментов (рис. 11е). При правильном решении задачи должны получить нуль, так как относительное перемещение этих сечений в горизонтальном направлении равно 0.

$$\delta_{A/A} = \frac{1}{EJ} \left[ 2 \left( \frac{1}{2} P \ell \cdot \ell \right) \frac{\ell}{3} + 2 \left( \frac{1}{2} P \ell \cdot \ell \right) \frac{11\ell}{3} + 2 \left( \frac{1}{2} 2\ell \cdot \frac{17}{20} P \ell \right) \times \right. \\ \left. \times \frac{2}{3} \ell - 2 \left( \frac{1}{2} 2\ell \frac{17}{20} P \ell \right) \frac{10}{3} \ell + \left( \frac{3}{20} P \ell \cdot 2\ell \right) \cdot 4\ell \right] = 0.$$

**Замечание.** Перемножение симметричной эпюры на кососимметричную не может служить проверкой.

**Пример 3.** Для рамы (рис. 12а) построить эпюру изгибающих моментов. Все элементы рамы имеют одинаковую жесткость  $EJ_x$ .

Данная рама три раза статически неопределима (внутренне). Реакции внешних связей определяются из уравнений статики (рис. 12б). Нагрузка, приложенная к симметричной раме, не обладает свойствами ни косой, ни прямой симметрии. Однако такую нагрузку можно разложить на симметричную и кососимметричную (рис. 12 г, в). При условии, что вертикальные стержни сохраняют устойчивость в раме с симметричной нагрузкой (рис. 12г), стержни не изгибаются.

Действительно, для эквивалентной системы, показанной на рис. 12д, перемещения  $\delta_{3\rho} = \delta_{2\rho} = 0$ .

Система канонических уравнений:

$$\left. \begin{aligned} \delta_{22} X_2 + \delta_{23} X_3 &= 0 \\ \delta_{32} X_2 + \delta_{33} X_3 &= 0 \end{aligned} \right\}$$

будет однородной, следовательно,  $X_2$  и  $X_3$  равны 0.

Таким образом, решение исходной задачи можно свести к решению системы с кососимметричной нагрузкой (рис. 12в). Разрезаем верхний стержень рамы (ригель) по оси симметрии. В этом сечении симметричные силовые факторы  $X_2$  и  $X_3$  равны нулю. Остается неизвестным силовой фактор  $X_1$ . Основная и эквивалентная системы показаны на рис. 12е, ж. Получаем одно каноническое уравнение:

20

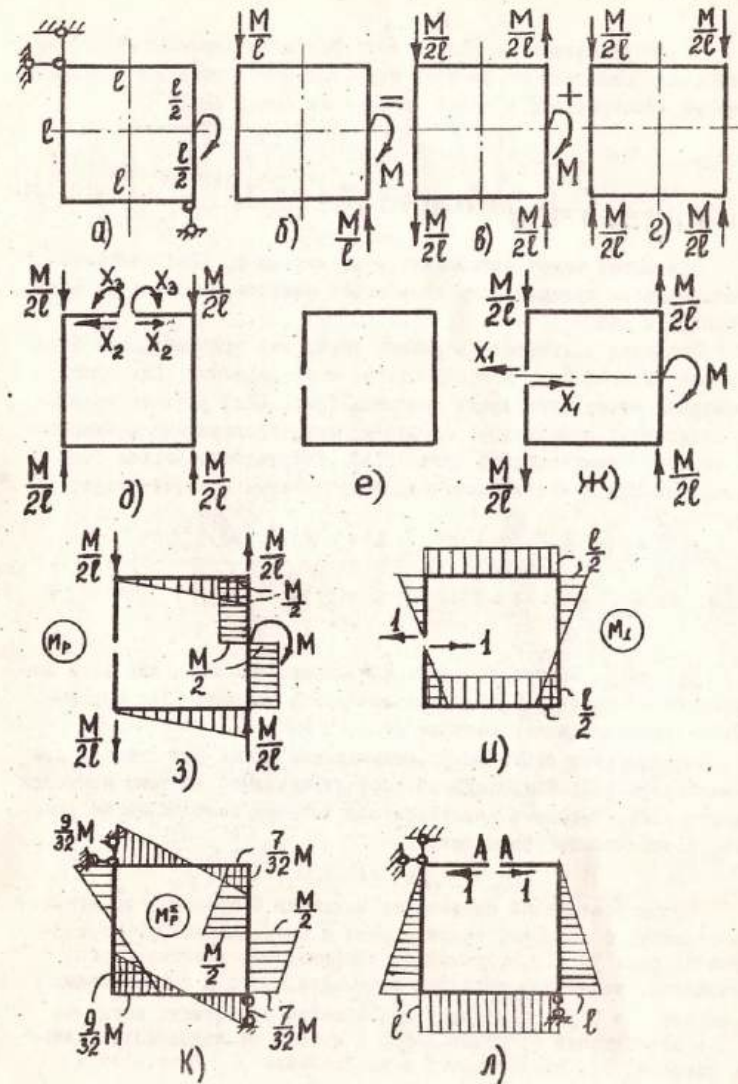


Рис. 12

$$\delta_{1P} + \delta_{11} \cdot X_1 = 0.$$

Для определения коэффициентов уравнения перемножаем эпюры изгибающих моментов от внешних нагрузок и от единичного силового фактора, построенных в основной системе (рис. 12а, и).

$$\delta_{1P} = -\frac{2}{EJ_x} \left[ \left( \frac{1}{2} \ell \cdot \frac{M}{\ell} \right) \frac{\ell}{2} + \left( \frac{\ell}{2} \cdot \frac{M}{4} \right) \frac{\ell}{4} \right] = -\frac{3}{8} \frac{M \ell^2}{EJ_x};$$

$$\delta_{11} = \frac{1}{EJ_x} \left[ 4 \left( \frac{1}{2} \ell \cdot \frac{\ell}{2} \right) \frac{2}{3} \frac{\ell}{2} + 2 \left( \frac{\ell}{2} \cdot \frac{\ell}{2} \right) \frac{\ell}{2} \right] = \frac{2}{3} \frac{\ell^3}{EJ_x}; \quad X_1 = \frac{9}{16} \frac{M}{\ell}.$$

Суммарная эпюра изгибающих моментов (рис. 12к) получена суммированием ординат эпюр изгибающих моментов от внешних нагрузок и от сил  $X_1$ .

Проверим полученное решение, определив относительное перемещение сечений А-А в горизонтальном направлении. Для этого суммарную эпюру изгибающих моментов (рис. 12к) умножим на эпюру изгибающих моментов от единичных сил, приложенных в направлении отброшенных связей (рис. 12л). Результатом должен быть нуль, так как относительное перемещение этих сечений отсутствует.

$$\delta_{1/A} = \frac{1}{EJ_x} \left[ -\left( \frac{1}{2} \ell \cdot \ell \right) \frac{3}{32} M - \left( \ell \cdot \ell \right) \frac{1}{32} M - \left( \frac{7}{32} M \cdot \frac{\ell}{2} \right) \frac{\ell}{4} - \right. \\ \left. - \frac{1}{2} \left( \frac{9}{32} M \cdot \frac{\ell}{2} \right) \cdot \frac{2}{3} \frac{\ell}{2} + \left( \frac{7}{32} M \cdot \frac{\ell}{2} \right) \frac{3}{4} \ell + \left( \frac{1}{2} \frac{9}{32} M \cdot \frac{\ell}{2} \right) \frac{2}{3} \ell \right] = 0!$$

**Пример 4.** Построить эпюру изгибающих моментов для рамы постоянной жесткости  $EJ_x$ , представленной на рис. 13а. Определить вертикальное перемещение сечения А.

Рамы три раза статически неопределима (один раз внешне, два раза внутренне). Рациональный вариант основной системы приведен на рис. 13б. Выгодная эквивалентная система изображена на рис. 13в. Каноническое уравнение:

$$\delta_{1P} + \delta_{11} X_1 = 0.$$

Эпюры в основной системе от заданных нагрузок и от единичного силового фактора, приложенного в направлении  $X_1$ , приведены на рис. 13 г, д. Определим коэффициенты канонического уравнения, используя интеграл Мора. Для этого в произвольных сечениях I и II участка определим моменты от внешних нагрузок  $M_P$  в зависимости от углов  $\alpha$  и  $\beta$  и момент от единичного силового фактора  $M_1$ , приложенного в направлении  $X_1$  (рис. 13г, д).

$$\text{II}_{\text{уч.}} \quad 0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2} \quad M_P = \frac{P}{2} R (1 - \cos \alpha); \quad M_1 = -R \sin \alpha; \quad ds = R d\alpha;$$

$$\delta_{1P} = \frac{2}{EJ_x} \left[ \int_0^{\pi/2} \frac{P}{2} R (1 - \cos \alpha) (-R \sin \alpha) R d\alpha + \int_0^{\pi/2} \frac{P}{4} R \sin \beta (-R \sin \beta) R d\beta \right] = -\frac{(4+\pi)}{8} \frac{PR^3}{EJ_x} = -0,89 \frac{PR^3}{EJ_x} \text{ см};$$

$$\delta_{11} = \frac{1}{EJ_x} \int_0^{\pi/2} R^2 \sin^2 \alpha R d\alpha = \frac{\pi R^3}{EJ_x} \text{ см/л}, \quad X_1 = 0,284 P.$$

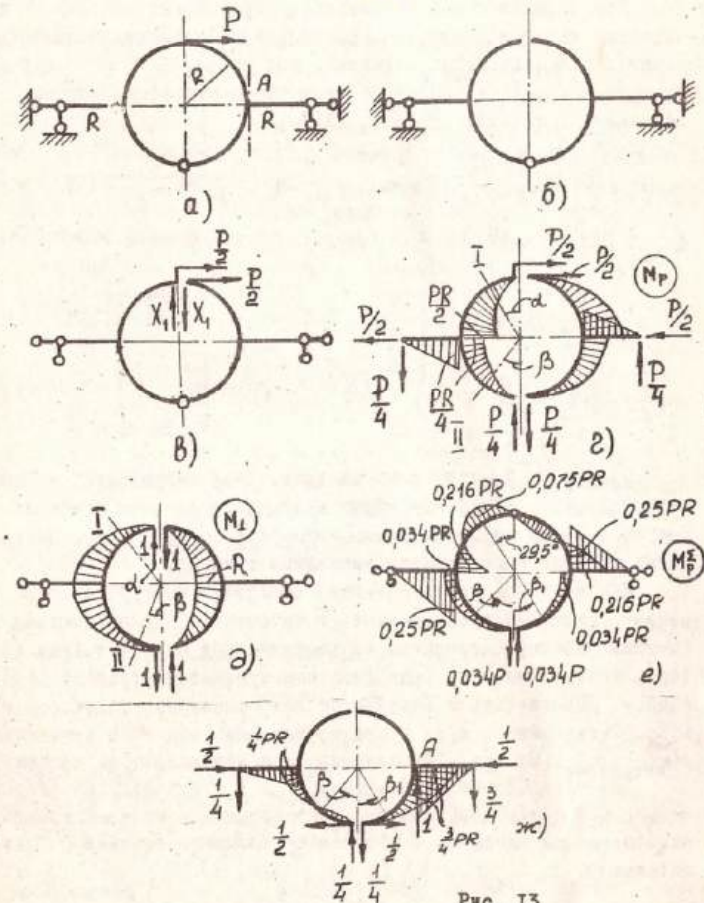


Рис. 13

Изгибающий момент в произвольном сечении равен алгебраической сумме момента от заданных сил и момента от единичной силы, увеличенного в  $X_1$  раз. Выражение для изгибающего момента будет:

$$M_d = \frac{P}{2} R (1 - \cos \alpha) - 0,284 PR \sin \alpha;$$

$$M_\beta = \frac{P}{4} R \sin \beta - 0,284 PR \sin \beta = 0,034 PR \sin \beta$$

Эпюра изгибающих моментов представлена на рис. 13е.

Для определения вертикального перемещения сечения А используем интеграл Мора (на прямолинейных участках перемножаем эпюры). В произвольных сечениях, под углами  $\beta$  и  $\beta_1$ , определим суммарный момент и момент от единичного силового фактора, приложенного в сечении А (рис. 13е, ж).

$$(0 \leq \beta \leq \frac{\pi}{2}); M_p = -0,034 PR \sin \beta; M_1 = \frac{1}{4} R \sin \beta - \frac{1}{2} R (1 - \cos \beta);$$

$$(0 \leq \beta_1 \leq \frac{\pi}{2}); M_p = 0,034 PR \sin \beta_1; M_1 = -\frac{1}{4} R \sin \beta_1 - \frac{1}{2} R (1 - \cos \beta_1);$$

$$\delta_A = \frac{1}{EJ_x} \left[ \left( \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} PR \cdot R \right) \frac{2}{3} \frac{R}{4} + \int_0^{\pi/2} 0,034 PR \sin \beta \cdot \left( \frac{1}{4} R \sin \beta - \frac{R}{2} (1 - \cos \beta) \right) \times \right.$$

$$\left. \times R d\beta + \int_0^{\pi/2} 0,034 PR \sin \beta_1 \cdot \left[ -\frac{1}{4} R \sin \beta_1 - \frac{1}{2} R (1 - \cos \beta_1) \right] R d\beta_1 - \right.$$

$$\left. - \left( \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} PR R \right) \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} R \right] = \frac{PR^3}{EJ_x} \left[ \frac{1}{48} - 0,017 \cdot \frac{\pi}{4} - \frac{1}{16} \right] = -0,0549 \frac{PR^3}{EJ_x}.$$

**Пример 5.** Участок рамы АВ (рис. 14а) нагревается на температуру  $\Delta t$ . Построить эпюру внутренних силовых факторов. Жесткость всех элементов рамы одинакова и равна  $EJ_x$ , коэффициент линейного расширения материала рамы  $\alpha$ .

Данная рама, представляющая замкнутый контур, три раза внутренне статически неопределима. В качестве основной системы рассмотрим систему с сечением на вертикальной оси симметрии (рис. 14б). Поперечная сила как кососимметричный внутренний силовой фактор, действующий в сечении по оси симметрии, будет равен нулю. Отличными от нуля будут нормальная сила  $X_1$  и изгибающий момент  $X_2$ . На рис. 14в представлена эквивалентная система.

Для определения неизвестных  $X_1$  и  $X_2$  запишем два канонических уравнения перемещения, представляющих соответственно относительное линейное и угловое перемещение сечений С относительно D

$$\delta_{11} X_1 + \delta_{12} X_2 + \delta_{1p} = 0,$$

$$\delta_{21} X_1 + \delta_{22} X_2 + \delta_{2p} = 0.$$

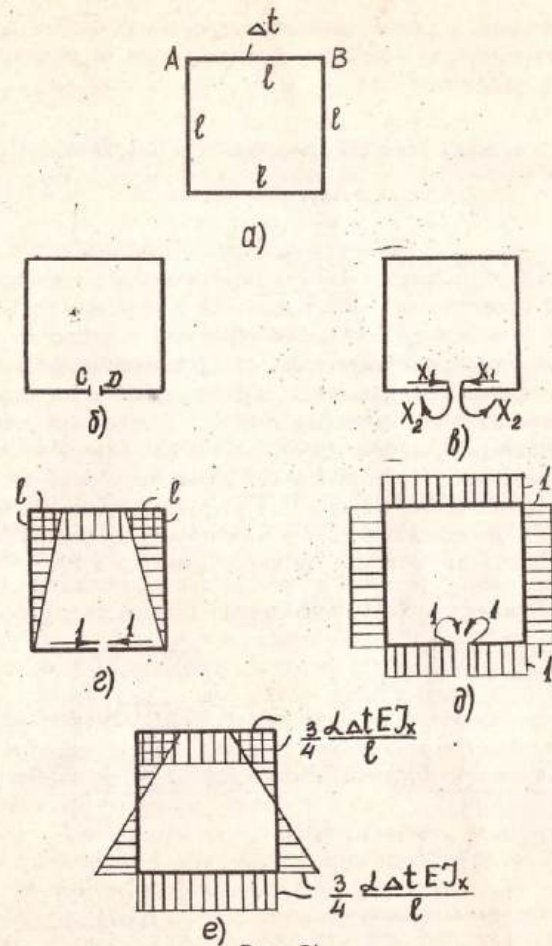


Рис. 14

Перемножив эпюры от  $X_1 = 1$  и от  $X_2 = 1$  (рис. 14г, д), определим коэффициенты канонических уравнений  $\delta_{11}, \delta_{12} = \delta_{21}$  и  $\delta_{22}$

$$EJ_x \delta_{11} = \frac{5}{3} l^3 \text{ см}^3; EJ_x \delta_{22} = 4l \text{ см};$$

$$EJ_x \delta_{12} = EJ_x \delta_{21} = -2l^2 \text{ см}^2.$$

Для определения  $\delta_{1p}$  и  $\delta_{2p}$  вспомним, что это соответственно вза-

имное линейное и угловое перемещения сечений  $C$  относительно  $D$  от действия внешних факторов, в нашем случае от повышения температуры. Тогда получим:

$$\delta_{1p} = -2\ell\Delta t \text{ см}; \delta_{2p} = 0.$$

После подстановки значений коэффициентов канонических уравнений получим:

$$\begin{aligned} \frac{5}{3}\ell^2 X_1 - 2\ell X_2 - 2\Delta t E J_x &= 0, \\ -\ell X_1 + 2X_2 &= 0. \end{aligned}$$

Решение этих уравнений выглядит так:

$$\begin{aligned} X_1 &= \frac{3}{2} \frac{2\Delta t E J_x}{\ell^2} \text{ кгс}, \\ X_2 &= \frac{3}{4} \frac{2\Delta t E J_x}{\ell} \text{ кгс}\cdot\text{см}. \end{aligned}$$

Суммарная эпюра изгибающих моментов представлена на рис. 14е.

Для проверки правильности решения задачи определим изменения расстояния между сечениями  $A_1 - A_1$ , используя две различные эквивалентные системы (рис. 15а, б). Как известно, для определения изменения расстояния между двумя сечениями, необходимо снять с эквивалентной системы все нагрузки, приложить в сечениях  $A_1 - A_1$  две единичные силы и перемножить суммарную эпюру изгибающих моментов на единичную эпюру (рис. 15 в, г).

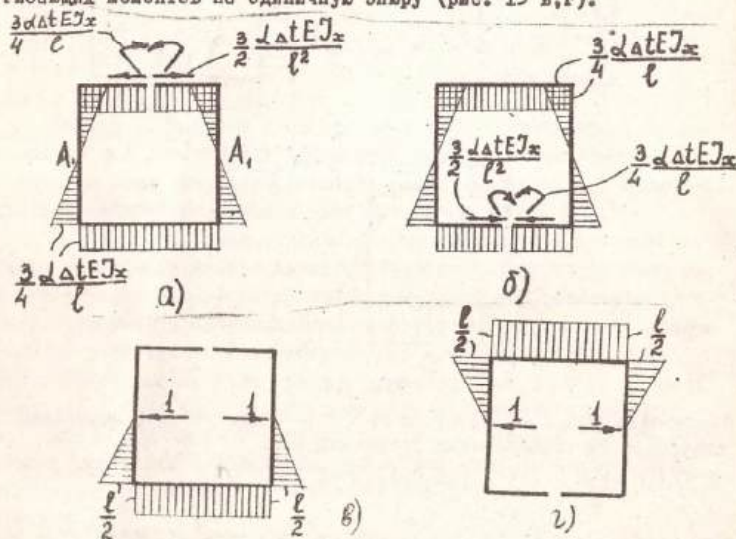


Рис. 15

В результате для двух эквивалентных систем соответственно получим:

$$\delta_{A_1 A_1} = \frac{1}{E J_x} \left[ \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \frac{2\Delta t E J_x}{\ell} \cdot \frac{\ell}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{\ell}{2} \cdot 2 + \frac{3}{4} \frac{2\Delta t E J_x}{\ell} \cdot \frac{\ell}{2} \right] = \frac{2\Delta t \ell}{2} \text{ см},$$

$$\delta_{A_1 A_1} = \frac{1}{E J_x} \left[ \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \frac{2\Delta t E J_x}{\ell} \cdot \frac{\ell}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{\ell}{2} \cdot 2 - \frac{3}{4} \frac{2\Delta t E J_x}{\ell} \cdot \frac{\ell}{2} \right] + 2\Delta t \ell = \frac{2\Delta t \ell}{2} \text{ см}.$$

Равенство перемещений указывает на то, что задача решена правильно.

### Плоскопространственные системы

В практике расчета машиностроительных конструкций часто приходится встречаться с плоскими рамами, нагруженными силами, лежащими не только в плоскости рамы, но и в плоскости, перпендикулярной плоскости рамы. Если нагрузка не перпендикулярна плоскости рамы, то ее раскладывают на нагрузку, лежащую в плоскости рамы, и нагрузку, перпендикулярную плоскости рамы. Используя принцип независимости действия сил, можно рассматривать каждую из нагрузок в отдельности. Первая система является плоской системой. Решение таких систем мы уже рассматривали. Вторая система называется плоскопространственной системой.

Рассмотрим расчет статически неопределимых плоскопространственных систем. Как и при расчете плоских рам, будем предполагать, что одна из главных центральных осей инерции поперечного сечения каждого элемента рамы также расположена в плоскости рамы. Главные центральные оси инерции поперечного сечения будем обозначать через  $x, y$ .

Познакомимся с обозначениями связей. Положение жесткого бруса в пространстве определяется шестью степенями свободы. Для обеспечения кинематической неизменяемости системы на брус необходимо наложить шесть связей.

На рис. 16а схематично изображено условие, запрещающее линейное перемещение в направлении оси  $y$ ; на рис. 16б — условие, запрещающее линейное перемещение в направлениях осей  $x$  и  $z$ . На рис. 16в приведена пространственная заделка (условное обозначение шести внешних связей: трех линейных и трех угловых).

Примеры плоскопространственных систем представлены на рис. 17а и 17б. Особенность плоскопространственных систем состоит в том, что реактивные и, следовательно, внутренние силовые факторы, лежащие в плоскости рамы, всегда равны нулю. Докажем это положение, рассматривая пример I.

**Пример I.** Для рассматриваемой рамы (рис. 17а):

- 1) Построить эпюры изгибающих и крутящих моментов.
- 2) Определить вертикальное перемещение сечения  $B$ , если сечение стержней рамы — трубка с диаметром  $D=208$ , причем  $J_p=2J_x$ ,  $G=\frac{2}{5}E$ . Заданная рама 2 раза статически неопределима, так как на раму наложены две дополнительные связи.

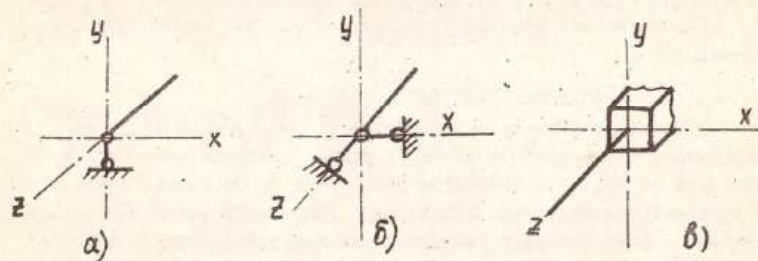


Рис. 16

Выбираем основную систему (рис. 17б), отбрасывая связи, наложенные на сечение  $A$ . На рис. 17в изображена эквивалентная система. Система канонических уравнений имеет вид:

$$\delta_{1p} + \delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 = 0,$$

$$\delta_{2p} + \delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 = 0.$$

Для вычисления коэффициентов построим эпюры внутренних моментов для основной системы, нагруженной заданной нагрузкой и единичными силами (рис. 17г, д, е).

$$\delta_{1p} = \frac{1}{EJ_x} \left[ \left( \frac{1}{3} \ell \frac{ql^2}{2} \right) \frac{3}{4} \ell + \frac{1}{EJ_p} \left[ \left( \frac{ql^2}{2} \right) \cdot \ell \right] \right] = \frac{1}{EJ_x} \left( \frac{ql^4}{8} + \frac{5}{4} \frac{ql^4}{2} \right) = \frac{3}{4} \frac{ql^4}{EJ_x} \text{ см},$$

$$\delta_{11} = \frac{1}{EJ_x} \left[ 2 \left( \frac{\ell^2}{2} \right) \frac{2}{3} \ell + (\ell^2) \frac{3}{2} \ell + \left( \frac{\ell^2}{2} \right) \frac{5}{3} \ell + \frac{5}{4} (\ell^2) \ell \right] = \frac{11\ell^3}{2EJ_x} \frac{1 \text{ см}}{\text{кгс} \cdot \text{см}},$$

$$\delta_{12} = \delta_{21} = 0, \quad \delta_{2p} = 0,$$

$$\delta_{22} = \frac{1}{EJ_y} \left[ \left( \frac{\ell^2}{2} \right) \frac{1}{3} \ell + (\ell^2) \ell + (\ell^2) \frac{3}{2} \ell + \left( \frac{\ell^2}{2} \right) \frac{5}{3} \ell \right] = \frac{11\ell^3}{3EJ_y} \frac{1 \text{ см}}{\text{кгс} \cdot \text{см}}.$$

Так как  $\delta_{2p} = 0$  и  $\delta_{21} = 0$  и  $\delta_{22} \neq 0$ , то из второго уравнения следует, что  $X_2 = 0$ . Из первого уравнения найдем  $X_1$ ,

$$X_1 = -\frac{\delta_{1p}}{\delta_{11}} = -\frac{3}{22} ql \text{ кгс}.$$

Суммарные эпюры изгибающих и крутящих моментов представлены на рис. 17ж.

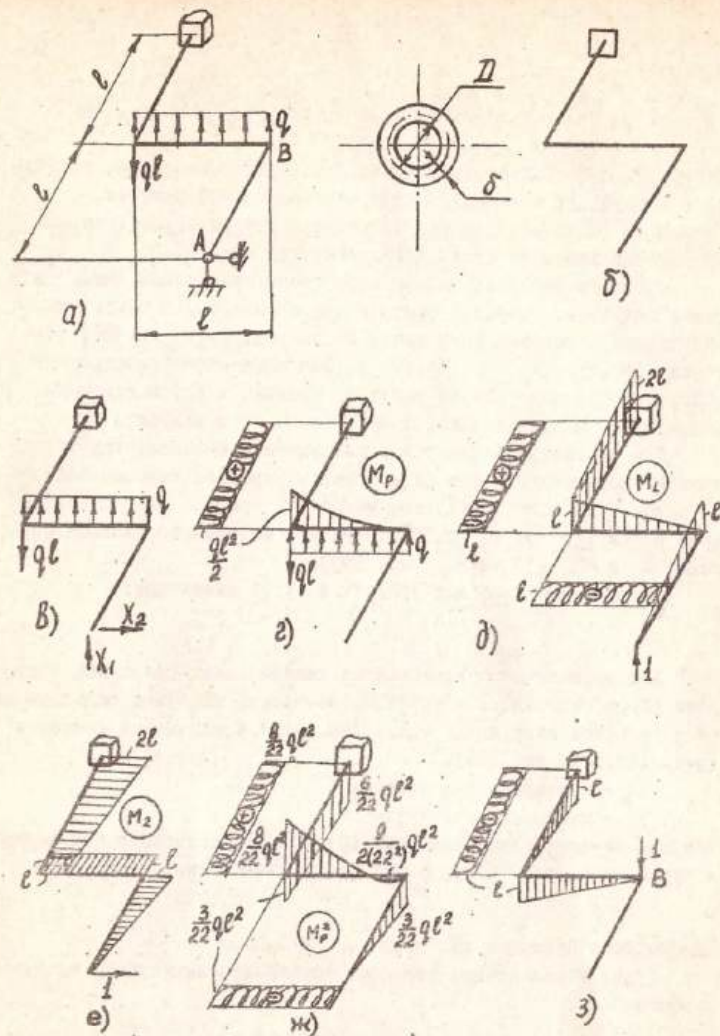


Рис. 17

Определим вертикальное перемещение сечения  $B$ . Приложим в сечении  $B$  единичную силу к основной системе (рис. 17а). Тогда

$$\delta_{22} = \frac{1}{EJ_x} \left[ \left( \frac{q\ell^3}{6} \right) \frac{3}{4} \ell + \left( \frac{1}{2} \cdot \frac{3q\ell^3}{2} \right) \frac{2}{3} \ell + \left( \frac{\ell^2}{2} \right) \left( \frac{3}{22} q\ell^2 + \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{22} q\ell^2 \right) - \frac{3}{2} \left( \frac{q}{2} \ell^2 \right) \ell \right] = \frac{37 q \ell^4}{88 EJ_x}$$

**Пример 2.** Для стальной рамы (рис. 18а) построить эпюры изгибающих и крутящих моментов. Проверить полученное решение.

Заданная система шесть раз статически неопределима, так как на систему наложено шесть дополнительных связей.

Наиболее рациональный вариант основной системы (рис. 18б) можно получить, разрезав раму по оси симметрии. В общем случае нагружения в сечении рамы имеем шесть внутренних силовых факторов ( $N, Q_x, Q_y, M_x, M_y, M_z$ ). Для плоскопространственных систем внутренние силовые факторы, лежащие в плоскости рамы, равны нулю. Следовательно,  $N, Q_x$  и  $M_y$  не возникают.

Для рассматриваемой рамы, нагруженной кососимметричной нагрузкой в сечении по оси симметрии, внутренние силовые факторы равны нулю. Следовательно, момент  $M_x$  равен нулю. Неизвестными останутся только кососимметричные внутренние силовые факторы  $Q_y$  и  $M_z$  ( $X_1$  и  $X_2$  рис. 18в).

Система канонических уравнений будет иметь вид:

$$\delta_{1p} + \delta_{11} X_1 + \delta_{12} X_2 = 0,$$

$$\delta_{2p} + \delta_{21} X_1 + \delta_{22} X_2 = 0.$$

Для вычисления коэффициентов канонических уравнений построим эпюры изгибающих и крутящих моментов, нагружая основную систему заданной нагрузкой, единичной силой и единичным моментом (рис. 18г, д и рис. 19а).

$EJ_x$  — жесткость при изгибе;

$GJ_p$  — жесткость при кручении.

Так как сечение элементов рамы круглое, то жесткости при изгибе и кручении связаны между собой следующим соотношением:

$$\frac{1}{GJ_p} = \frac{2(1+\mu)}{E} \cdot \frac{1}{2J_x} = \frac{1+\mu}{EJ_x} = \frac{5}{4} \cdot \frac{1}{EJ_x}.$$

Коэффициент Пуассона для стали  $\mu = 0,25$ .

Будем использовать это соотношение при вычислении коэффициентов:

$$\delta_{1p} = \frac{2}{EJ_x} \left[ - \left( M \cdot \frac{\ell}{2} \right) \frac{3}{4} \ell \right] - \frac{2}{GJ_p} (M\ell)\ell = - \frac{13}{4} \frac{M\ell^2}{EJ_x},$$

$$\delta_{11} = \frac{2}{EJ_x} \left[ \left( \frac{\ell^2}{2} \right) \frac{2}{3} \ell \cdot 2 \right] + \frac{2}{GJ_p} (\ell^2)\ell = \frac{23}{6} \frac{\ell^3}{EJ_x},$$

$$\delta_{12} = \delta_{21} = - \frac{2}{EJ_x} \left( \frac{\ell^2}{2} \right) \ell = - \frac{\ell^3}{EJ_x},$$

$$\delta_{22} = \frac{2}{EJ_x} (\ell) + \frac{2}{GJ_p} (\ell) = \frac{19\ell}{2EJ_x}, \quad \delta_{2p} = 0.$$

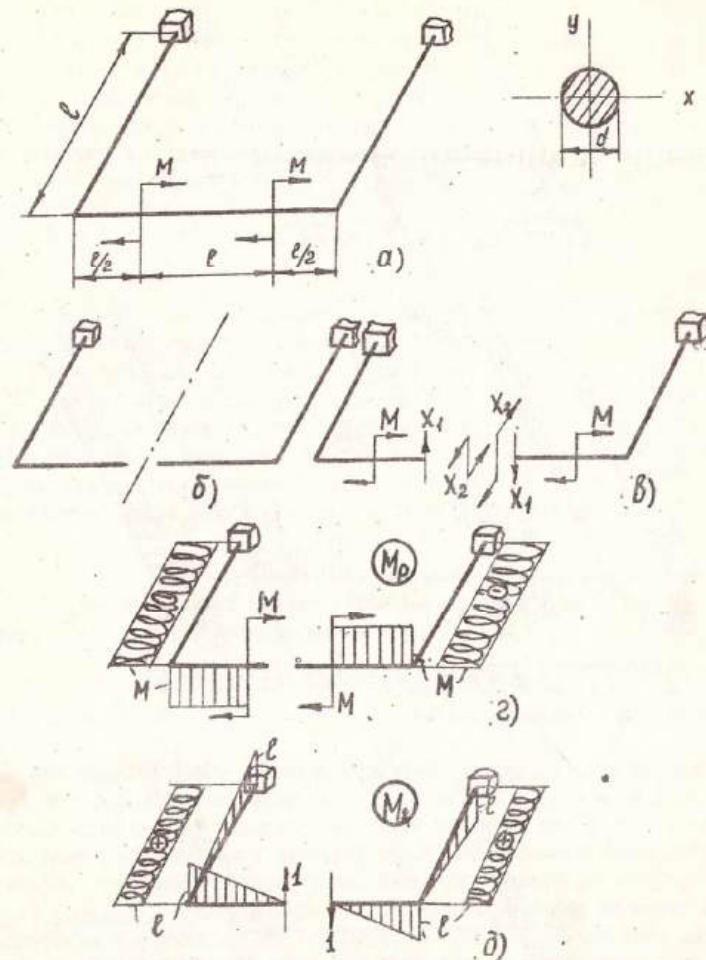


Рис. 18

Подставляя вычисленные коэффициенты в канонические уравнения и решая систему уравнений, определим неизвестные  $X_1$  и  $X_2$

$$X_1 = \frac{117}{130} \frac{M}{\ell}, \quad X_2 = \frac{13}{65} M.$$

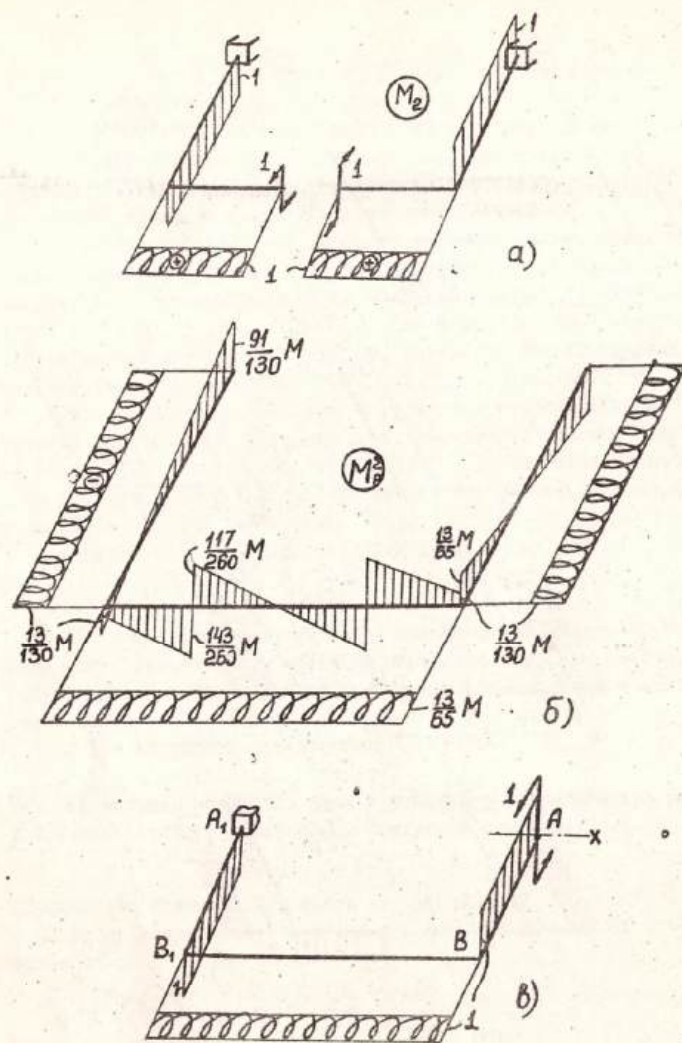


Рис. 19

Эпюры изгибающих и крутящих моментов для заданной рамы даны на рис. 19б.

Проверим решение путем перемножения эпюры (рис. 19б) на эпюру от единичной нагрузки для другой основной системы (рис. 19в). В данном случае вычисляется угол поворота сечения А относительно главной центральной оси X. Если решение верно, то в результате перемножения должен получиться нуль, так как сечение А жестко заделано

$$\theta_A = \frac{2}{EJ_x} \left[ -\left( \frac{1}{2} l \frac{117}{130} M \right) + \left( \frac{13}{65} M l \right) \right] + \frac{1}{EJ_p} \left( \frac{13}{65} M \cdot 2l \right) =$$

$$= \frac{Ml}{EJ_x} \left( -\frac{117}{130} + \frac{26}{65} + \frac{5}{4} \cdot \frac{26}{65} \right) = 0$$

**Пример 3.** Построить эпюры изгибающих и крутящих моментов для рамы, изображенной на рис. 20а.

Рациональные основная и эквивалентная системы даны на рис. 20б, в. Так как нагрузка симметрична, то в сечении по оси симметрии возникают только изгибающие моменты  $M_x$  (на рис. 20в обозначены  $X_1$ ). Факторы, лежащие в плоскости рамы, будут равны нулю, так как рама плоскостная. Используя вторую ось симметрии, можно найти неизвестный момент  $X_1$  (рис. 20г)

$$Pl - 2X_1 = 0,$$

$$X_1 = \frac{Pl}{2}$$

Эпюры изгибающих моментов для заданной рамы приведены на рис. 20д. Крутящие моменты равны нулю.

#### Статически неопределимые балки

Балка статически неопределима, если на нее наложено более трех связей. При раскрытии статической неопределимости по методу сил целесообразно выбирать основную систему, врезая шарниры над опорами. При этом многоопорная балка расчленяется на ряд двухопорных балок и эпюры моментов от заданных сил и от единичных факторов получаются наиболее простыми. Рассмотрим методику решения статически неопределимых балок на примерах.

**Пример 1.** Схема закрепления и нагружения балки постоянной жесткости  $EJ_x$  показана на рис. 21а. На балку наложено пять связей, следовательно, она два раза статически неопределима. Отбросим две "лишние" связи, врезая шарниры над опорами В и С. В результате получим основную систему (рис. 21б). Взамен отброшенных внутренних связей приложим изгибающие моменты  $X_1$  и  $X_2$ . На рис. 21в показана эквивалентная система. Неизвестные  $X_1$  и  $X_2$  находим из условий отсутствия взаимного угла поворота сечений над опорами В и С. Эти два условия представим в виде канониче-

ских уравнений метода сил:  $\delta_{11}x_1 + \delta_{12}x_2 + \delta_{1p} = 0$ ,  
 $\delta_{21}x_1 + \delta_{22}x_2 + \delta_{2p} = 0$ .

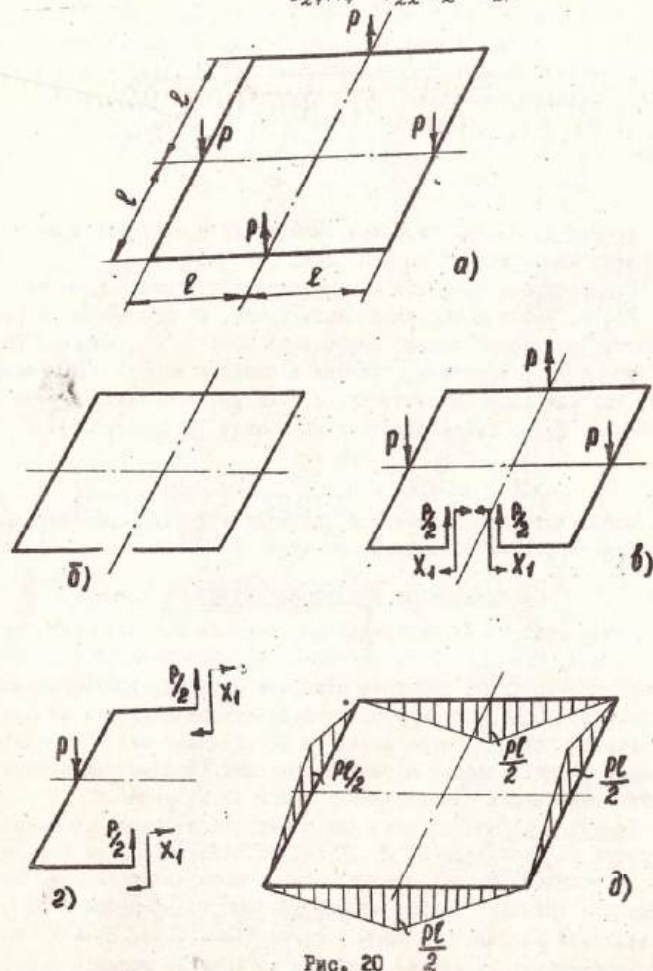


Рис. 20

Для вычисления коэффициентов канонических уравнений строим эпюры моментов от внешних нагрузок, от  $X_1 = 1$  и  $X_2 = 1$  (рис. 21 г, д, е). Применяя способ Верещагина, получим:

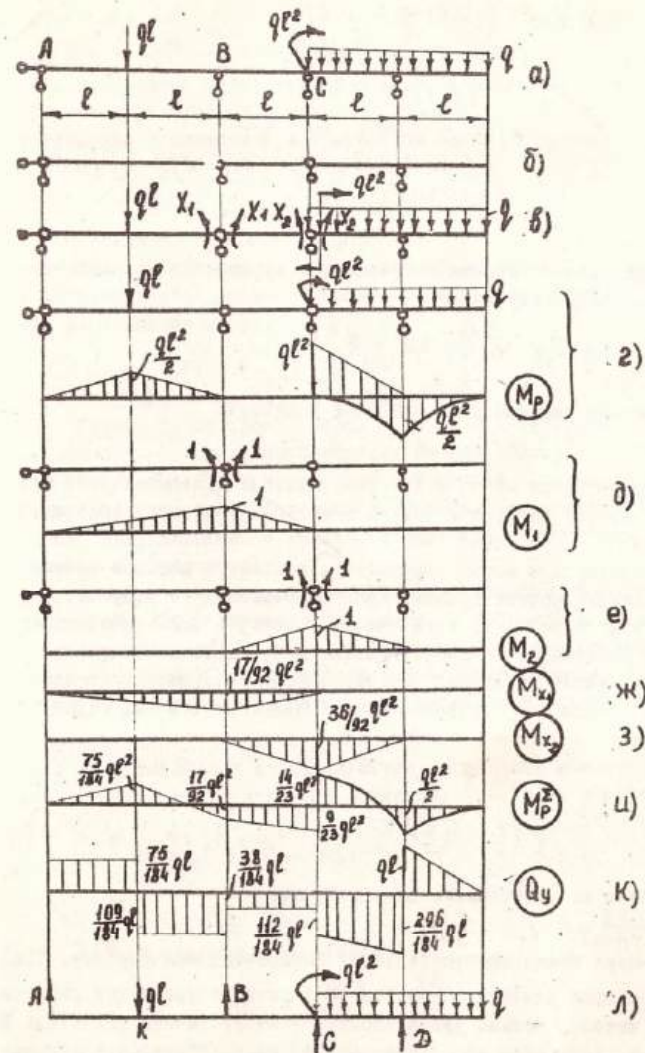


Рис. 21

$$\begin{aligned}
EI_X \delta_{11} &= \left(\frac{1}{2} \cdot 2l\right) \cdot \frac{2}{3} + \left(\frac{1}{2} l\right) \cdot \frac{2}{3} = l; \\
EI_X \delta_{12} &= EI_X \delta_{21} = \left(\frac{1}{2} l\right) \cdot \frac{1}{3} = \frac{l}{6}; \\
EI_X \delta_{22} &= 2 \cdot \left(\frac{1}{2} l\right) \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{3} l; \\
EI_X \delta_{1p} &= \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{ql^2}{2} \cdot 2l\right) \cdot \frac{1}{2} = \frac{ql^3}{4}; \\
EI_X \delta_{2p} &= \left(\frac{1}{2} ql^2 l\right) \frac{2}{3} - \left(\frac{1}{3} \cdot \frac{ql^2}{2} \cdot l\right) \frac{1}{4} = \frac{7}{24} ql^3.
\end{aligned}$$

Подставляя значения полученных коэффициентов в канонические уравнения, получим:

$$\begin{aligned}
X_1 + \frac{1}{6} X_2 + \frac{1}{4} ql^2 &= 0; \\
\frac{1}{6} X_1 + \frac{2}{3} X_2 + \frac{7}{24} ql^2 &= 0.
\end{aligned}$$

Решение системы дает значения моментов:

$$X_1 = -\frac{17}{92} ql^2; \quad X_2 = -\frac{9}{23} ql^2.$$

Строим эпюры от  $X_1$  и  $X_2$  (рис. 21а, в). Складывая их с эпурой от внешних нагрузок, получаем суммарную эпюру изгибающих моментов  $M_p^z$  (рис. 21в).

Реакции опор можно определить, пользуясь методом сечений и приравняв момент внешних сил, приложенных по одну сторону от некоторого сечения, изгибающему моменту в этом сечении. Последний определяем по эпюре  $M_p^z$ . Таким путем можно получить достаточное число уравнений для нахождения реакций. Для рассматриваемой балки эти уравнения можно представить в виде (рис. 21 и, л):

$$M_A = Al = \frac{75}{184} ql^2; \quad M_C = A3l - ql \cdot 2l + Bl = -\frac{9}{23} ql^3;$$

$$M_C' = Dl - 2ql^2 = \frac{14}{23} ql^2;$$

$$M_B = -2ql \cdot 2l + D \cdot 2l + Cl - ql^2 = -\frac{17}{92} ql^2.$$

Решая их последовательно, получим:

$$A = \frac{75}{184} ql; \quad B = \frac{71}{184} ql; \quad C = -\frac{37}{92} ql; \quad D = \frac{60}{23} ql.$$

Теперь можно построить эпюру поперечных сил  $Q_y$  (рис. 21к).

Проверку решения осуществляем с помощью уравнения упругой линии, которое должно удовлетворять всем граничным условиям. В универсальной форме это уравнение для рассматриваемого примера имеет вид:

$$EI_X v = d + cz + \frac{75ql}{184 \cdot 6} z^3 - \frac{ql}{6} (z-l)^3 \Big|_I + \frac{71ql}{184 \cdot 6} (z-2l)^3 \Big|_{II} - \frac{37ql}{92 \cdot 6} (z-3l)^3 + \frac{ql^2}{24} (z-3l)^2 - \frac{ql}{24} (z-3l)^4 \Big|_{IV}$$

Постоянные интегрирования  $d$  и  $C$  определяются из двух граничных условий, например,  $v_{z=0} = 0$  и  $v_{z=2l} = 0$ . Используя соответственно уравнения I и II участков балки, получим:

$$EI_X v_{z=0} = d = 0;$$

$$EI_X v_{z=2l} = C \cdot 2l + \frac{75ql}{184 \cdot 6} 8l^3 - \frac{ql^4}{6} = 0,$$

$$\text{откуда} \quad C = -\frac{13}{69} ql^3.$$

Если задача решена верно, прогиб должен быть равным нулю и на двух других опорах. Определим, например, прогиб  $v_{z=3l}$ , где расположена опора  $C$ .

$$EI_X v_{z=3l} = -\frac{13}{69} ql^3 3l + \frac{75}{184 \cdot 6} ql \cdot 2 \cdot l^3 - \frac{ql}{6} \cdot 8l^3 + \frac{71}{184 \cdot 6} ql^4 = 0.$$

Следовательно, задача решена верно.

**Пример 2.** Построить эпюры  $M_p^z$  и  $Q_y$  и определить угол поворота сечения  $C$  балки, изображенной на рис. 22а.

Сечение  $A$  балки закреплено неподвижно, сечение  $B$  не может поворачиваться и перемещаться в вертикальном направлении. Всего на балку наложено 5 связей, следовательно, она два раза статически неопределима.

Висерем основную систему, заменяя заделки шарнирными опорами (рис. 22б). Эквивалентная система показана на рис. 22в.

Поскольку горизонтальная реакция в опоре  $A$  отсутствует, условия нагружения балки обратно симметричны, поэтому  $X_1 = X_2$ . Тогда уравнение перемещений можно записать в виде:

$$X_1 \delta_{11} + \delta_{1p} = 0.$$

На рис. 22 г, д показана эпюра изгибающих моментов от внешней нагрузки и от единичных моментов. Определим коэффициенты

$$\delta_{1p} \text{ и } \delta_{11}: \quad \delta_{1p} = -\frac{2}{EI_X} \left( \frac{2}{3} \cdot \frac{ql^2}{8} l \right) \frac{1}{2} = -\frac{ql^3}{12 EI_X};$$

$$\delta_{11} = \frac{2}{EI_X} \left( \frac{1}{2} l \right) \frac{2}{3} = \frac{2}{3} \frac{l^3}{EI_X}.$$

Из канонического уравнения

$$X_1 = -\frac{\delta_{1p}}{\delta_{11}} = \frac{ql^2}{8}.$$

На рис. 22е дана эпюра  $M_p^z$ .

Определим реакции, исходя из условия равновесия балки (рис. 22з):

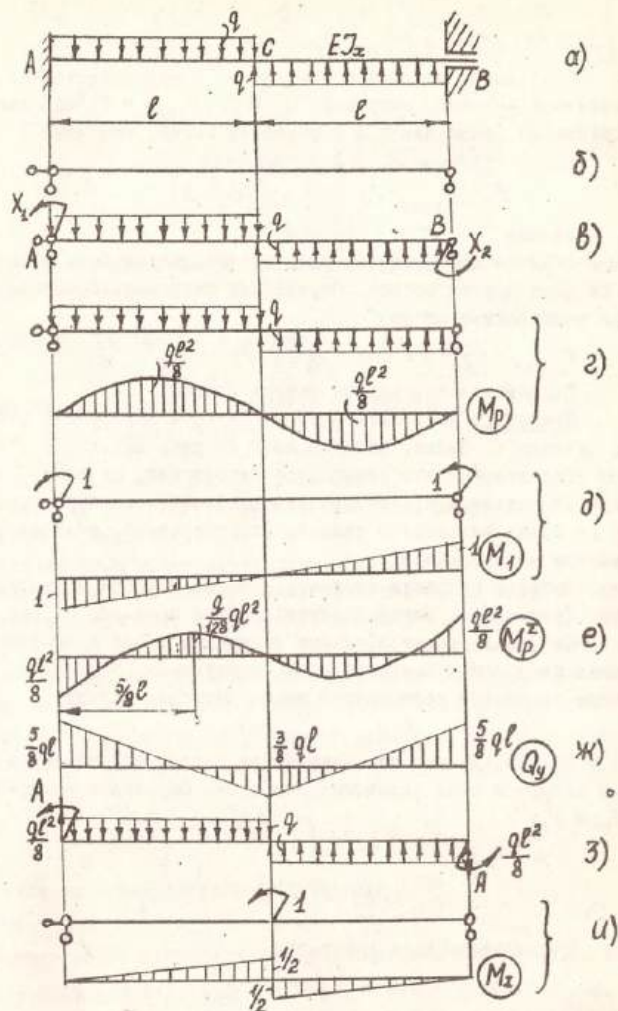


Рис. 22

$$A \cdot 2l - 2 \cdot \frac{q l^2}{8} - q l^2 = 0.$$

Отсюда

$$A = \frac{5}{8} q l.$$

На рис. 22ж показана эпюра поперечных сил  $Q_y$ . Экстремальное значение изгибающего момента  $M_p^x$  соответствует сечению  $x = \frac{5}{8} l$ , где  $Q_y = 0$ , и равно

$$x = \frac{5}{8} l, \quad M_p^x = -\frac{q l^2}{8} \cdot \frac{5}{8} q l \cdot \frac{5}{8} l - \frac{q}{2} \left( \frac{5}{8} l \right)^2 = \frac{9}{128} q l^2.$$

Для определения линейного или углового перемещения балки можно исходить из уравнения упругой линии, как это было сделано в предыдущем примере, или использовать способ Верещагина. В последнем случае нужно к балке приложить единичный силовой фактор, соответствующий искомому перемещению, в данном случае — момент.

Перемещения в статически неопределимых задачах удобнее определять не для заданной, а для эквивалентной системы. Поэтому единичный момент прикладываем к основной системе (рис. 22и). При перемножении эпюр  $M_p^x$  (рис. 22е) и  $M_1$  (рис. 22и) по способу Верещагина следует эпюру  $M_p^x$  разложить на простейшие фигуры. Для этого можно использовать исходные эпюры (рис. 22г и рис. 22д). Тогда получим:

$$\theta_c = \frac{2}{E J_x} \left[ \left( \frac{2}{3} \cdot \frac{q l^2}{8} l \right) \frac{1}{4} - \left( \frac{1}{2} \cdot \frac{q l^2}{8} l \right) \frac{1}{6} \right] = \frac{q l^3}{48 E J_x}.$$

#### Расчет рам в матричной форме

При расчете многократно статически неопределимых рамных систем методом сил трудоемкой операцией является не только решение системы канонических уравнений, но и определение их коэффициентов. Эти операции могут быть выполнены с помощью ЭЦМ, если представить все решение задачи в матричной форме. Расчет любой рамы разбивается на два этапа.

1. По определенным правилам составляются исходные матрицы (матрица податливости, матрицы моментов от единичных усилий, матрица нагрузок).

2. Производятся операции над исходными матрицами. Эти операции могут быть проведены на ЭЦМ.

По полученным данным строится эпюра изгибающих или крутящих моментов.

Г. Расчетные схемы. При расчете рам искомыми внутренними усилиями, необходимыми для построения эпюр, являются изгибающие и крутящие моменты. Как известно, при действии на раму только

сосредоточенных сил или сосредоточенных моментов эпюры получают-ся линейными на всех участках. При таком виде нагружения матрич-ная форма расчета существенно упрощается. В этом случае эпюры моментов в плоской раме на каждом участке может быть задана просто двумя числами, определяющими значения моментов в начале и в конце каждого участка, имеющего постоянную жесткость. При на-личии на каком-либо участке распределенной поперечной нагрузки (рис. 23а) целесообразно заменить действие ее на раму сосредото-ченными силами и моментами. Это производится следующим образом:

1. Мысленно вводятся заделки по концам участков, нагружен-ных поперечными распределенными нагрузками (рис. 23б).

2. Определяются опорные реакции и моменты во введенных заделках от этой нагрузки.

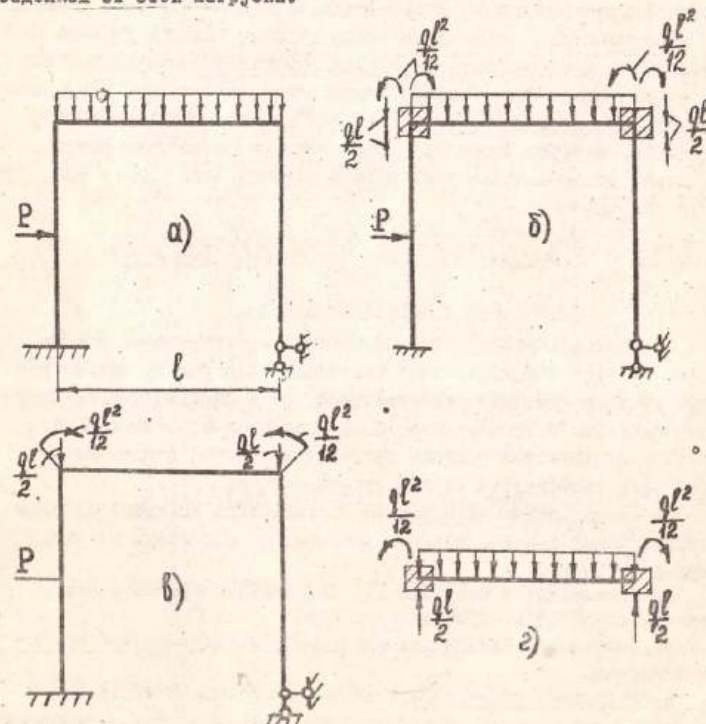


Рис. 23

3. Найденные опорные реакции и моменты, взятые с обратным знаком, прикладываются к заданной раме в местах, где были вве-дены заделки (рис. 23б).

4. Полученную систему (рис. 23в) с сосредоточенными на-гружками, приложенными по концам участков, решают в матричной форме.

5. Определяют изгибающие моменты от распределенных попе-речных нагрузок в выделенных статически неопределимых балках (при этом можно использовать готовые решения).

6. Изгибающие моменты для заданной рамы получаются путем суммирования значений изгибающих моментов, полученных из мат-ричного расчета и из расчета выделенных статически неопредели-мых балок (рис. 23г).

Таким образом, действие распределенной нагрузки на раму в любом случае может быть заменено сосредоточенными силами и мо-ментами. Поэтому далее будет рассмотрен расчет только таких рам, у которых внешняя нагрузка имеет вид сосредоточенных сил или мо-ментов, приложенных по концам участков.

2. Матрицы податливости. Углы поворота концевых сечений какого-либо участка рамы могут быть определены с помощью мат-рицы податливости.

Допустим, что требуется определить углы поворота концов участка рамы с изгибающими моментами  $M_i$  и  $M_{i+1}$  по концам. Пред-ставим этот участок рамы в виде балки на двух шарнирных опорах, нагруженной указанными моментами по концам (рис. 24). Тогда, используя способ Верещагина, вычислим углы поворота концов бал-ки:

$$\left. \begin{aligned} \vartheta_i &= \frac{l}{3EI} M_i + \frac{l}{6EI} M_{i+1} \\ \vartheta_{i+1} &= \frac{l}{6EI} M_i + \frac{l}{3EI} M_{i+1} \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Зависимость (1) может быть представлена в матричном виде:

$$\vec{\vartheta} = \delta \vec{M}, \quad (2)$$

где  $\vec{\vartheta} = \begin{bmatrix} \vartheta_i \\ \vartheta_{i+1} \end{bmatrix}$  — матрица-столбец углов поворота;

$\vec{M} = \begin{bmatrix} M_i \\ M_{i+1} \end{bmatrix}$  — матрица-столбец изгибающих моментов, возникающих в концевых сечениях данного участка рамы;

$$\delta = \begin{bmatrix} \frac{l}{3EI} & \frac{l}{6EI} \\ \frac{l}{6EI} & \frac{l}{3EI} \end{bmatrix} = \frac{l}{6EI} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} - \text{матрица податливости рассматри-} \\ \text{ваемого участка рамы.}$$

Если рама имеет несколько участков с постоянными по длине поперечными сечениями, то подобные матрицы податливости могут быть составлены для каждого 1, 2, 3, ...  $n$ -го участка рамы.

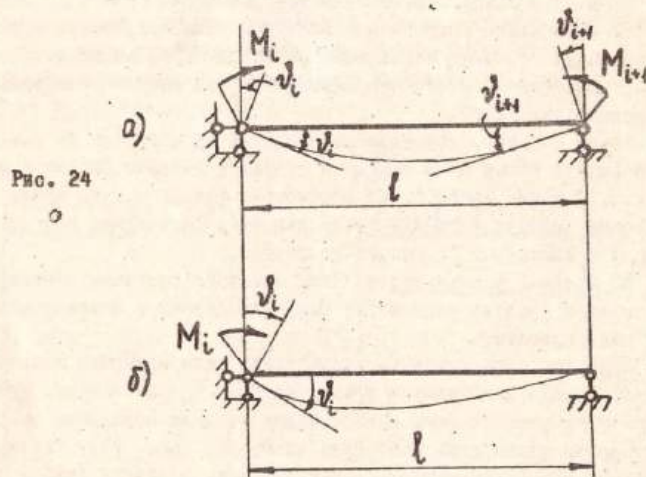


Рис. 24

При расчете всей рамы в целом используется матрица податливости не связанных между собой участков

$$\delta = \begin{bmatrix} \delta_1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \delta_2 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \delta_3 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \delta_4 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \delta_n \end{bmatrix}, \quad (3)$$

где

$$\delta_1 = \frac{l_1}{6EI_1} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}; \delta_2 = \frac{l_2}{6EI_2} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}; \dots \delta_n = \frac{l_n}{6EI_n} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

— матрицы податливости 1, 2, ...  $n$ -го участка рамы с длинами  $l_1, l_2, \dots, l_n$  и с моментами инерции поперечных сечений, соответственно  $I_1, I_2, \dots, I_n$ .

Если какой-либо участок рамы имеет на одном конце шарнир и изгибающий момент в этом сечении рамы равен нулю, то, определяя углы поворота сечения на том конце участка рамы, где при-

ложен момент  $M_i$ , имеем

$$\vartheta_i = \frac{l_i}{3EI_i} M_i \quad (4)$$

и, следовательно, матрица податливости для этого участка

$$\delta_i = \frac{l_i}{3EI_i} \quad (5)$$

3. Определение перемещений. Как известно, при определении перемещений в рамах с прямолинейными участками постоянной жесткости обычно используется способ "перемножения эпюр". На рис. 25а, б изображены две линейные эпюры, построенные для  $n$ -го участка рамы, которые необходимо "перемножить" при определении какого-либо перемещения. При "перемножении" этих эпюр по способу Верещагина получим:

$$\frac{1}{EI_n} \left\{ \frac{1}{2} M_{oi} l_n [M_{oi} + \frac{1}{3} (M_{ii} - M_{oi})] + \frac{1}{2} M_{ik} l_n [M_{oi} + \frac{1}{3} (M_{ii} - M_{oi})] - \left( \frac{2}{6} \frac{l_n}{EI_n} M_{oi} + \frac{l_n}{6EI_n} M_{ii} \right) M_{ok} + \left( \frac{l_n}{6EI_n} M_{oi} + \frac{2}{6} \frac{l_n}{EI_n} M_{ii} \right) M_{ik} \right\} \quad (6)$$

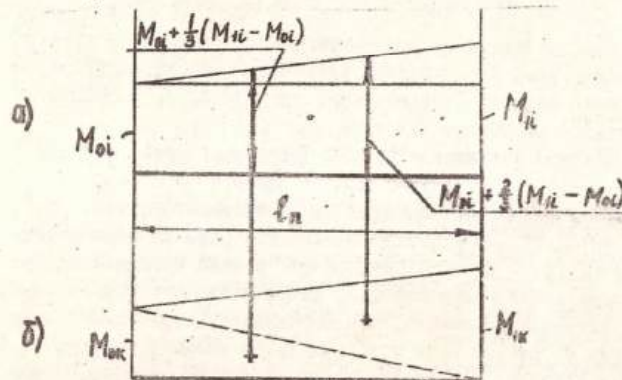


Рис. 25

Полученное выражение можно представить в виде произведения следующих матриц:

$$[M_{oi} \ M_{ii}] \times \begin{bmatrix} \frac{2}{6} \frac{l_n}{EI_n} & \frac{l_n}{6EI_n} \\ \frac{l_n}{6EI_n} & \frac{2}{6} \frac{l_n}{EI_n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_{oi} \\ M_{ik} \end{bmatrix} = M_i' \delta_n M_k, \quad (7)$$

где  $M_i'$  — транспонированная матрица-столбец изгибающих моментов  $i$ -й эпюры;

$\delta_n$  — приведенная выше матрица податливости  $n$ -го участка рамы;

$M_k$  — матрица-столбец изгибающих моментов  $k$ -й эпюры.

Если необходимо перемножить эпюры на нескольких участках рамы, то в матричной форме это примет вид:

$$[M_{0i} M_{1i} M_{2i} \dots] \times \begin{bmatrix} \delta_1 & 0 & 0 & \dots \\ \delta_2 & \delta_1 & 0 & \dots \\ \delta_3 & \delta_2 & \delta_1 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_{0k} \\ M_{1k} \\ M_{2k} \\ \vdots \end{bmatrix} = M_i' \delta M_k \quad (8)$$

Элементами в матрицах моментов  $M_i$  и  $M_k$  являются значения изгибающих моментов на концах участков рамы, записанные последовательно в одном и том же порядке для обоих случаев нагружения рамы (см. рассмотренный далее пример).

Матрица изгибающих моментов от внешней нагрузки во всех сечениях рамы (по концам участков) может быть представлена в виде произведения

$$M_p = \delta P, \quad (9)$$

где  $\delta$  — прямоугольная матрица изгибающих моментов, возникающих в сечениях рамы при действии единичных внешних нагрузок, каждый столбец матрицы соответствует одному варианту нагружения рамы единичным воздействием;

$P$  — матрица внешних нагрузок; число строк этой матрицы равно числу внешних нагрузок в каждом варианте нагружения; число столбцов определяется числом вариантов нагружения.

Если требуется определить перемещения рамы по нескольким направлениям, то согласно способу Мора, в этих направлениях к раме прикладываются единичные силы или моменты и от них строятся эпюры изгибающих моментов. При определении перемещений с помощью матриц по данным этих эпюр находятся элементы матрицы  $\delta$ . Число строк матрицы  $\delta$  равно числу расчетных сечений, в которых определяются моменты, а число столбцов соответствует числу искомых перемещений. Для определения перемещений (элементов вектора  $Z$ ) надо в соответствии с (8) перемножить матрицы  $\delta$  и  $M_p$ . При этом  $Z$  будет равен

$$Z = \delta' \delta M_p, \quad (10)$$

где  $\delta'$  — транспонированная матрица  $\delta$ . Используя зависимость (9), получим:

$$Z = \delta' \delta P. \quad (11)$$

4. Расчет статически неопределимых рам методом сил. Изгибающие моменты в сечениях статически неопределимых рам могут быть получены в виде суммы:

$$M_p^* = \delta_0 P + \delta_1 X, \quad (12)$$

где  $\delta_0$  — матрица изгибающих моментов в расчетных сечениях рамы, принятой в качестве основной системы, от последовательного нагружения ее каждым вариантом заданных сил, принимаемых равными единице;

$P$  — матрица внешних нагрузок;

$\delta_1$  — матрица изгибающих моментов в расчетных сечениях основной системы от последовательного приложения всех неизвестных усилий, принимаемых равными единице;

$X$  — матрица-столбец неизвестных усилий.

Неизвестные усилия  $X$  определяются из условия равенства нулю перемещений по направлению лишних связей. Согласно зависимостям (10) и (12) перемещения по направлению действия усилий могут быть определены из условия:

$$Z_1 = \delta_1' \delta M_p^* = \delta_1' \delta \delta_0 P + \delta_1' \delta \delta_1 X + D_{10} P + D_{11} X, \quad (13)$$

$$\text{где } D_{11} = \delta_1' \delta \delta_1; \quad D_{10} = \delta_1' \delta \delta_0. \quad (14)$$

Если  $Z_1 = 0$ , то

$$X = -D_{11}^{-1} D_{10} P. \quad (15)$$

Подстановка значения  $X$  из (15) в зависимость (12) дает

$$M_p^* = \delta_0 P - \delta_1 D_{11}^{-1} D_{10} P = \delta^* P, \quad (16)$$

где  $\delta^* = \delta_0 - \delta_1 D_{11}^{-1} D_{10}$  — матрица изгибающих моментов в расчетных сечениях статически неопределимой рамы от воздействия внешних нагрузок, принимаемых равными единице.

Для проверки правильности решения задачи определяются перемещения, заведомо равные нулю. В матричной форме правильность решения задачи подтверждается, если соблюдается равенство

$$\delta_1' \delta M_p^* = 0. \quad (17)$$

Итак, последовательность операций при расчете рам методом сил такова:

1. Выбирается основная система и составляются исходные матрицы  $\delta$ ,  $\delta_0$ ,  $\delta_1$  и  $P$ .
2. Производятся следующие действия над исходными матрицами:

- в. Транспонирование матрицы  $\delta_{11}$ .  
 б. Определение элементов матрицы  $D_{11}$ , являющихся коэффициентами канонических уравнений метода сил:

$$D_{11} = \delta_{11}' \delta \delta_{11} = c \delta_{11}.$$

Для удобства дальнейших вычислений здесь вводится промежуточная матрица  $c = \delta_{11}' \delta$ .

- в. Обращение матрицы  $D_{11}$  и проверка правильности обращения:

$$D_{11}^{-1} D_{11} = E.$$

- г. Вычисление матрицы  $D_{10}$  в виде произведения:

$$D_{10} = \delta_{11}' \delta \delta_0.$$

Элементами этой матрицы являются свободные члены канонических уравнений метода сил для случая действия единичных внешних нагрузок.

- д. Определение значений лишних неизвестных согласно выражению (15),

$$X = -D_{11}^{-1} D_{10} P.$$

- е. Определение из зависимости (12) изгибающих моментов  $M_p^z$  в сечениях заданной рамы:

$$M_p^z = \delta_0 P + \delta_{11} X.$$

- ж. Проверка правильности решения согласно условию:

$$\delta_{11}' \delta M_p^z = 0.$$

Ниже приводится пример расчета рамы изложенным способом.

Требуется построить эпюру изгибающих моментов для рамы, изображенной на рис. 26а. Для проведения расчета в матричной форме необходимо перейти к такой расчетной схеме, при которой нагрузка прикладывается только в узлах. Выделим горизонтальный участок рамы с распределенной нагрузкой (рис. 26б) и будем рассматривать его как балку с двумя заделками. На рис. 26в изображена эпюра изгибающих моментов для такой балки. Реактивные усилия и изгибающие моменты, возникающие в опорах этой балки, взятые с обратными знаками, являются внешней узловой нагрузкой для той схемы (рис. 26г), которая используется далее при матричной форме расчета. Изгиб стержней рамы вызывается в этом случае лишь одним моментом  $\frac{q\ell^2}{12}$ , а сила  $\frac{q\ell}{2}$  вызывает только сжатие вертикального стержня. Поэтому матрица нагрузки  $P = \begin{bmatrix} \frac{q\ell^2}{12} \\ 0 \end{bmatrix}$  имеет первый порядок. На рис. 26д изображена используемая при расчете эквивалентная система. Исходные матрицы  $\delta_{11}$  и  $\delta_0$  составляются с помощью эпюр  $M_1$ ,  $M_2$  и  $M_p$ , построенных в ос-

новной системе от  $X_1 = 1$ ,  $X_2 = 1$  (рис. 27а,б) и от единичного момента в том узле рамы, где приложен момент  $\frac{q\ell^2}{12}$  (рис. 27в). Рама имеет два участка. На первом вертикальном участке изгибающий момент вычислим только в сечении I; на горизонтальном участке будем определять изгибающие моменты в двух угловых сечениях (2 и 3). В соответствии с этим исходные матрицы  $\delta_{11}$ ,  $\delta_0$  и  $\delta$  будут иметь 3-й порядок. Используя значения изгибающих моментов в указанных сечениях на эпюрах  $M_1$  и  $M_2$ , получим:

$$\delta_{11} = \begin{bmatrix} -\ell & 0 \\ -\ell & 0 \\ -\ell & +\ell \end{bmatrix} = \ell \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 0 \\ -1 & +1 \end{bmatrix}.$$

от  $X_1=1$  от  $X_2=1$

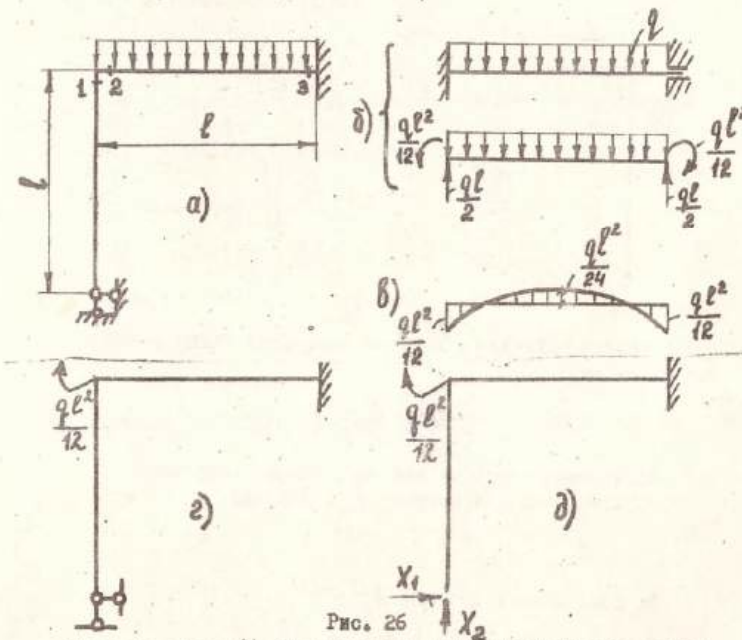


Рис. 26

Согласно эпюре  $M_p$ , значения изгибающих моментов от единичной внешней нагрузки (единичного момента) в тех же сечениях могут быть записаны в виде матрицы:

$$\delta_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

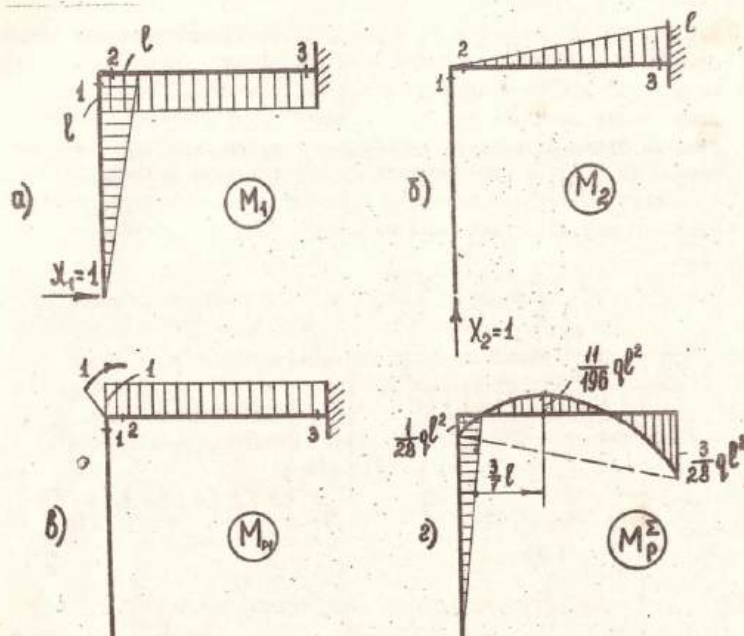


Рис. 27

Матрица податливости  $\delta$  не связанных между собой элементов имеет вид:

$$\delta = \frac{l^3}{6EJ} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Производим операции над полученными матрицами:

1. Транспонируем матрицу  $\delta$ . Получим

$$\delta' = \delta \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & +1 \end{bmatrix}$$

2. Перемножаем матрицы  $\delta'$  и  $\delta$

$$C = \delta' \delta = \frac{l^2}{6EJ} \begin{bmatrix} -2 & -3 & -3 \\ 0 & +1 & +2 \end{bmatrix}$$

3. Находим элементы матрицы  $D_{11}$

$$D_{11} = C \delta' = \frac{l^3}{6EJ} \begin{bmatrix} 8 & -3 \\ -3 & +2 \end{bmatrix}$$

4. По формуле  $D_{11}^{-1} = \frac{D_{11}}{|D_{11}|}$  вычислим значения элементов матрицы  $D_{11}^{-1}$

$$D_{11}^{-1} = \frac{\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 8 \end{bmatrix}}{7} \cdot \frac{6EJ}{l^3}$$

5. Получим матрицу  $D_{10}$  как произведение матриц  $C$  и  $\delta_0$ :

$$D_{10} = C \delta_0 = \frac{l^2}{6EJ} \begin{bmatrix} -6 \\ +3 \end{bmatrix}$$

6. Находим неизвестные усилия  $X$  по формуле (15):

$$X = -D_{11}^{-1} D_{10} P = -\frac{6}{7} \frac{EJ}{l^3} \frac{l^2}{6EJ} \begin{bmatrix} -3 \\ +6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ql^2 \\ 12 \end{bmatrix} = -\frac{ql}{28} \begin{bmatrix} -1 \\ +2 \end{bmatrix}$$

7. Определяем изгибающие моменты в узлах рамы (рис. 26г) от действия изгибающего момента  $\frac{ql^2}{12}$

$$M_p^z = \delta_0 P + \delta_1 X = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ql^2 \\ 12 \end{bmatrix} + l \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 0 \\ -1 & +1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} \frac{ql}{28} = \frac{ql^2}{84} \begin{bmatrix} -3 \\ +4 \\ -2 \end{bmatrix}$$

8. Суммируем значения изгибающих моментов в сечениях 2 и 3, вычисленные для расчетной схемы, изображенной на рис. 26г, со значениями соответствующих моментов для балки, представленной на рис. 26в.

Изгибающий момент в сечении 3

$$M_3 = -\frac{ql^2}{12} + \frac{2}{84} ql^2 = -\frac{3}{28} ql^2$$

Изгибающий момент в сечении 2

$$M_2 = -\frac{ql^2}{12} + \frac{4}{84} ql^2 = -\frac{3}{28} ql^2$$

Согласно полученным значениям на рис. 27г построена эпюра изгибающих моментов для заданной рамы.

## Оглавление

|                                                                                         |    |
|-----------------------------------------------------------------------------------------|----|
| Введение . . . . .                                                                      | 8  |
| Метод сил . . . . .                                                                     | 6  |
| Плоские рамы . . . . .                                                                  | 6  |
| Определение перемещений . . . . .                                                       | 9  |
| Проверка правильности решения . . . . .                                                 | 11 |
| Использование свойств симметрии при раскрытии статической<br>неопределенности . . . . . | 15 |
| Плоскопространственные системы . . . . .                                                | 26 |
| Статически неопределимые балки . . . . .                                                | 33 |
| Расчет рам в матричной форме . . . . .                                                  | 39 |
| 1. Расчетные схемы . . . . .                                                            | 39 |
| 2. Матрицы податливости . . . . .                                                       | 41 |
| 3. Определение перемещений . . . . .                                                    | 42 |
| 4. Расчет статически неопределимых рам методом сил . . . . .                            | 45 |