

Министерство высшего и среднего специального образования СССР

Московское ордена Ленина, ордена Октябрьской Революции и
ордена Трудового Красного Знамени
высшее техническое училище им. Н.Э.Баумана

И.Д.Кисенко, Б.В.Миненков

Утверждены редсоветом МВТУ

РАСЧЕТ ПЛОСКИХ РАМ

Методические указания
для студентов вечернего факультета
по курсу "Сопротивление материалов"

Под редакцией А.С.Газаряна

Данные методические указания издаются в соответствии с учебным планом. Рассмотрены и одобрены кафедрой К-5 28.06.85 г., методической комиссией факультета К 28.06.85 г. и учебно-методическим управлением 01.07.85 г.

Рецензент д.т.н. проф. МТИ Стасенко И.В.

В первой части методических указаний рассмотрены статически определимые системы. Даны примеры построения эпюр изгибающих моментов и определения перемещений.

Вторая часть содержит основные сведения по расчету статически неопределимых рам, построения эпюр изгибающих моментов, определения перемещений и проверки решений.

© Московское высшее техническое училище им. Н.Э.Баумана

Оглавление

1. Статически определимые рамы	3
1.1. Построение эпюр изгибающих моментов	3
1.2. Определение линейных и угловых перемещений	3
2. Статически неопределимые плоские рамы	13

Редактор Ю.Н.Хлебникий

Корректор Л.И.Малютина

Заказ 516 Объем 2 п.л./2 уч.-изд.л./ Тираж 500 экз.
Бесплатно. Подписано в печать 11.03.86 г. План 1985 г., № 87.

Типография МВТУ. 107005, Москва, Б-5, 2-я Бауманская, 5.

I. СТАТИЧЕСКИ ОПРЕДЕЛИМЫЕ РАМЫ

I.1. Построение эпюр изгибающих моментов

Плоские рамы представляют собой системы жестко соединенных стержней, оси которых расположены в одной плоскости. В этой же плоскости действует и вся нагрузка (рис. I.1a). Кроме того, в этой плоскости должна лежать одна из главных осей поперечного сечения каждого стержня рамы. В поперечном сечении стержня плоской рамы в общем случае возникают продольная сила N , поперечная сила Q и изгибающий момент M (рис. I.1б). Значения и направления внутренних силовых факторов определяют методом сечений. При расчетах на прочность и жесткость влияние N и Q , как правило, оказывается несущественным по сравнению с влиянием M и поэтому исследование внутренних силовых факторов сводится к построению эпюры изгибающего момента M . Его принято изображать на эпюре отрезком, отложенным в масштабе перпендикулярно продольной оси стержня на сжатой стороне последнего.

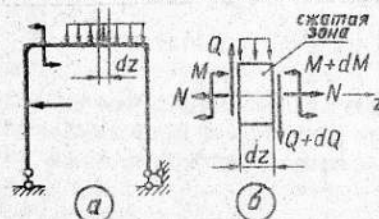


Рис. I.1

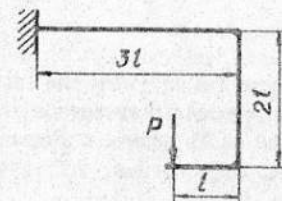


Рис. I.2

Приемы построения эпюр изгибающих моментов рассмотрены в задачах I.1-I.3.

Задача I.1. Для указанной на рис. I.2 рамы построить эпюру изгибающего момента.

Решение. Построению эпюры изгибающего момента предшествует определение реакций связей. Возникающие в опоре (заделке) реакции могут быть найдены с помощью уравнений равновесия, но в данном случае в этих расчетах нет необходимости, так как применяя метод сечений, можно рассматривать ту часть рамы, которая нагружена известной силой P .

Выбираем произвольные сечения 1, 2, 3 на каждом участке рамы (рис. I.3). Координаты сечений обозначаем соответственно

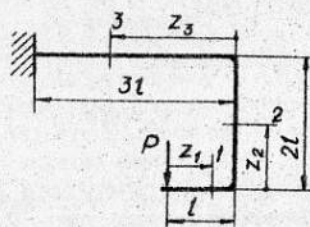


Рис. 1.3

z_1, z_2, z_3 . Начало отсчета можно взять на любом из концов стержня. На рис. 1.4 показаны отсеченные части рамы и внутренние силовые факторы в сечениях 1, 2, 3. Буквой x обозначен след оси x , перпендикулярной плоскости yz рамы.

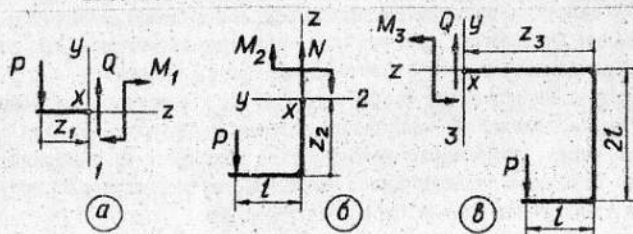


Рис. 1.4

Оставляя без внимания продольную силу N и поперечные силы Q , составляем уравнения равновесия $\sum M_x = 0$ для каждой отсеченной части рамы и определяем значения изгибающих моментов M_1, M_2, M_3 :

$$\begin{aligned} 1) M_1 - Pz_1 &= 0, & M_1 &= Pz_1; \\ 2) M_2 - Pl &= 0, & M_2 &= Pl; \\ 3) M_3 - P(z_3 - l) &= 0, & M_3 &= P(z_3 - l). \end{aligned}$$

В соответствии с полученными выражениями строим эпюру M (рис. 1.5). Направление M_1 (рис. 1.4а) показывает, что сжата нижняя часть стержня 1, а направление M_2 (рис. 1.4б) показывает, что сжата правая часть стержня 2. Соответственно ординаты эпюры M_1 и M_2 отложены вниз и вправо (рис. 1.5). На участке 3 знак M_3 не остается постоянным:

$$\begin{aligned} M_3 &= -Pl \text{ при } z_3 = 0 \text{ (правое концевое сечение);} \\ M_3 &= 2Pl \text{ при } z_3 = 3l \text{ (левое концевое сечение).} \end{aligned}$$

Знак минус указывает, что направление M_3 противоположно изображенному на чертеже (рис. 1.4в), т.е. сжатая часть стержня расположена не снизу, а сверху. Поэтому ордината $M_3 = -Pl$ отложена вверх, а ордината $M_3 = 2Pl$ - вниз.

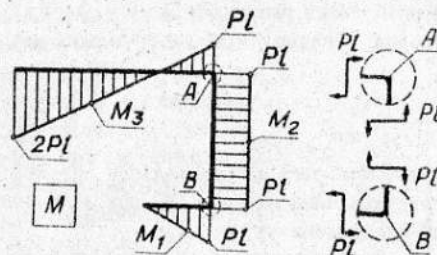


Рис. 1.5

Заметим, что в узлах рамы, т.е. в местах жесткого соединения двух стержней, изгибающие моменты в сечениях обоих стержней одинаковы. Это правило отражает равновесие углового элемента рамы, выделенного двумя сечениями, бесконечно близкими к точке соединения стержней. На рис. 1.5 изображены угловые элементы рамы (узлы А и В) и изгибающие моменты в поперечных сечениях (продольные и поперечные силы не показаны). Ноно, что равновесие узла обеспечивается только при одинаковых моментах в обоих сечениях.

При отсутствии распределенной по длине стержня нагрузки можно, не определяя изгибающего момента в произвольном сечении, построить эпюру, если найти изгибающие моменты в концевых сечениях участка, отложить соответствующие ординаты на сжатой стороне стержня и соединить концы ординат прямой линией.

Задача 1.2. Для показанной на рис. 1.6 рамы построить эпюру изгибающего момента.

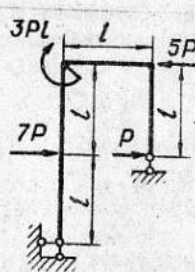


Рис. 1.6

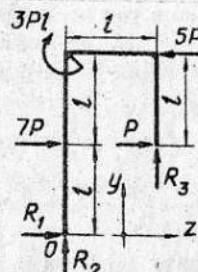


Рис. 1.7

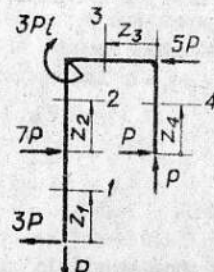


Рис. 1.8

Решение. Заменяем связи реакциями R_1, R_2, R_3 (рис. I.7) и определяем их значения с помощью уравнений равновесия:

$$\begin{aligned}\sum z = 0, \quad R_1 + 7P - 5P + P &= 0, \quad R_1 = -3P, \\ \sum M_o = 0, \quad R_2 l - Pl + 5P \cdot 2l - 3Pl - 7Pl &= 0, \quad R_2 = P, \\ \sum y = 0, \quad R_2 + R_3 &= 0, \quad R_3 = -R_2 = -P.\end{aligned}$$

Знаки минус говорят о том, что действительные направления сил R_1 и R_3 противоположны указанным на рис. I.7 направлениям. Фактическая картина сил изображена на рис. I.8.

Выбираем произвольные сечения I, 2, 3, 4 на всех участках рамы (рис. I.8), абсциссы сечений обозначаем соответственно z_1, z_2, z_3, z_4 и используем метод сечений для определения изгибающих моментов M_1, M_2, M_3, M_4 в этих сечениях.

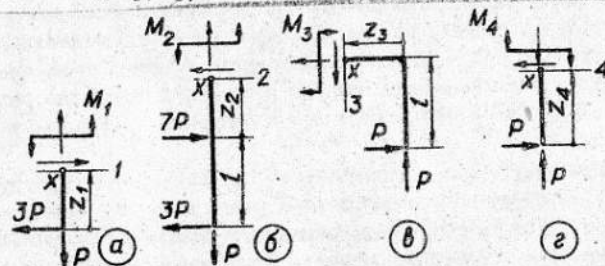


Рис. I.9

На рис. I.9 показаны отсеченные части рамы и внутренние силовые факторы в сечениях I, 2, 3, 4. Еще раз отметим, что продольные и поперечные силы нас не интересуют. Определяем изгибающие моменты M_1, M_2, M_3, M_4 , составляя уравнения равновесия $\sum M_x = 0$ для каждой отсеченной части рамы:

$$\begin{aligned}1) \quad M_1 - 3Pz_1 &= 0, \quad M_1 = 3Pz_1, \\ 2) \quad M_2 + 7Pz_2 - 3P(l + z_2) &= 0, \quad M_2 = P(3l - 4z_2), \\ 3) \quad M_3 - Pl - Pz_3 &= 0, \quad M_3 = P(l + z_3), \\ 4) \quad M_4 - Pz_4 &= 0, \quad M_4 = Pz_4.\end{aligned}$$

В соответствии с полученными выражениями строим эпюру M (рис. I.10). Направление M_1 (рис. I.9a) указывает, что сжата левая часть стержня. На втором участке $M_2 = 3Pl$ при $z_2 = 0$ и $M_2 = -Pl$ при $z_2 = l$. Знак минус говорит о том, что направление M_2 при $z_2 = l$ противоположно изображенному на рис. I.9б,

т.е. сжата правая часть стержня. Направление M_3 (рис. I.9в) указывает, что сжата верхняя часть стержня, а направление M_4 (рис. I.9г) указывает, что сжата правая часть стержня. На каждом участке ординаты эпюры M (рис. I.10) отложены на сжатой стороне стержня.

После построения эпюры M полезно выделить узлы рамы и убедиться, что алгебраическая сумма моментов всех пар сил, нагружающих выделенный узел, равна нулю (узлы A и B на рис. I.10).

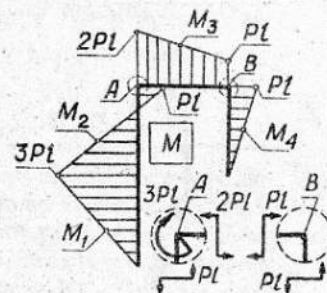


Рис. I.10

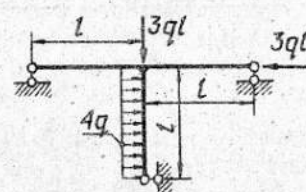


Рис. I.11

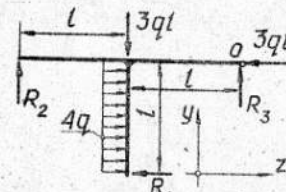


Рис. I.12

Задача I.3. Для показанной на рис. I.11 рамы построить эпюру изгибающего момента.

Решение. Заменяем связи реакциями R_1, R_2, R_3 (рис. I.12) и находим их значения с помощью уравнений равновесия:

$$\begin{aligned}\sum z = 0, \quad 4ql - 3ql - R_1 &= 0, \quad R_1 = ql; \\ \sum M_o = 0, \quad R_2 \cdot 2l - 3ql \cdot l - 4ql \cdot \frac{l}{2} + R_1 \cdot l &= 0, \quad R_2 = 2ql; \\ \sum y = 0, \quad R_2 - 3ql + R_3 &= 0, \quad R_3 = ql.\end{aligned}$$

Выбираем на каждом участке рамы произвольные сечения I, 2, 3 с абсциссами z_1, z_2, z_3 (рис. I.13). Составляем уравнения $\sum M_x = 0$ для отсеченных частей рамы (рис. I.14) и находим изгибающие моменты M_1, M_2, M_3 :

$$\begin{aligned}1) \quad M_1 - 2ql \cdot z_1 &= 0, \quad M_1 = 2ql \cdot z_1; \\ 2) \quad M_2 - ql \cdot z_2 &= 0, \quad M_2 = ql \cdot z_2;\end{aligned}$$

$$3) M_3 + 4qlz_3 - \frac{q^2}{2} z_3^2 = 0, M_3 = qlz_3 - 2ql^2 z_3^2$$

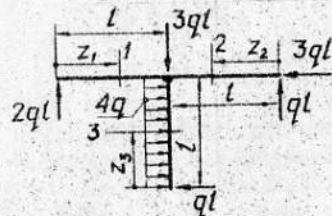


Рис. I.13

В соответствии с полученными выражениями строим эпюру изгибающего момента (рис. I.15). Здесь M_1 и M_2 — линейные функции, а M_3 — квадратичная функция, графическая интерпретация которой требует предварительного последования на экстремум.

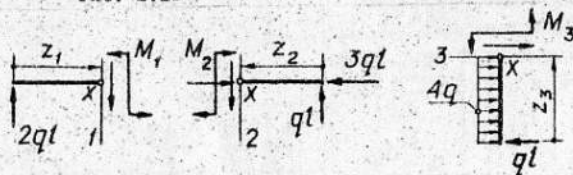


Рис. I.14

Приравняв нулю первую производную $dM_3/dz_3 = ql - 4qz_3 = 0$, находим абсциссу z_3^* сечения с экстремальным значением M_3 :

$$z_3 = z_3^* = l/4$$

Для построения эпюры на участке 3 вычисляем значения M_3 при $z_3 = 0$, $z_3 = l/4$, $z_3 = l$ и соответственно получаем $M_3 = 0$, $M_3 = ql^2/8$, $M_3 = -ql^2$.

Знак минус указывает, что в сечении $z_3 = l$ направление M_3 противоположно изображенному на

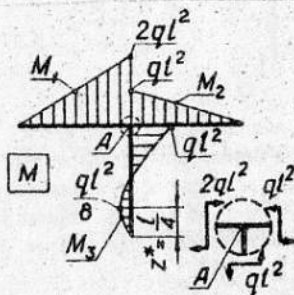


Рис. I.15

рис. I.14, т.е. сжата правая часть стержня, и, следовательно, ордината M_3 должна быть отложена вправо (рис. I.15).

После построения эпюры M полезно проверить равновесие тройного узла А. Выделив узел и показав в сечениях изгибающие моменты (рис. I.15), убеждаемся, что сумма моментов равна нулю.

I.2. Определение линейных и угловых перемещений

Перемещения в рамах определяют энергетическим методом с помощью интеграла Мора

$$\delta = \int \frac{M_p M_1}{EI} dz,$$

где M_p и M_1 — изгибающие моменты в произвольном сечении, возникающие соответственно от воздействия заданных нагрузок и от воздействия единичного силового фактора. В рамах с прямолинейными стержнями функция M_1 линейна. Если при этом стержни имеют на каждом участке постоянную жесткость EI , то интеграл Мора вычисляют, используя способ Верещагина:

$$\delta = \frac{1}{EI} \int M_p \cdot M_1 dz = \frac{1}{EI} \Omega \cdot M_{1c};$$

здесь Ω — площадь эпюры изгибающего момента M_p ; M_{1c} — ордината эпюры изгибающего момента M_1 в том сечении, где расположен центр тяжести площади Ω .

Задача I.4. Найти линейное и угловое перемещения сечения K (рис. I.16). Дано: $P = 8$ кН, $\alpha = 40^\circ$, $l = 200$ мм, $E = 2 \cdot 10^5$ МПа.

Решение. Линейное перемещение сечения K

$$\delta_K = \sqrt{(\delta_K^v)^2 + (\delta_K^h)^2},$$

где δ_K^v — вертикальное, δ_K^h — горизонтальное перемещения.

Для определения линейных и угловых перемещений строим соответствующие эпюры изгибающих моментов.

Эпюра M_p от заданной нагрузки показана на рис. I.17, эпюра M_1 от единичной вертикальной силы — на рис. I.18, эпюра M_2 от единичной горизонтальной силы — на рис. I.19 и эпюра M_3 от единичного момента — на рис. I.20.

Напомним, что единичный силовой фактор прикладывают в том сечении, перемещение которого определяется, причем направление этого фактора выбирают произвольно, т.е. вертикальную силу направляют либо вверх, либо вниз, горизонтальную силу — либо влево, либо — вправо, момент — либо по часовой стрелке, либо

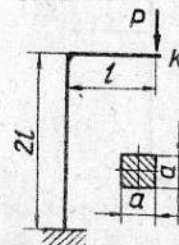


Рис. I.16

против. Знак вычисленного перемещения указывает направление перемещения: плюс означает, что направления перемещения и единичного силового фактора совпадают, минус, — что эти направления противоположны.

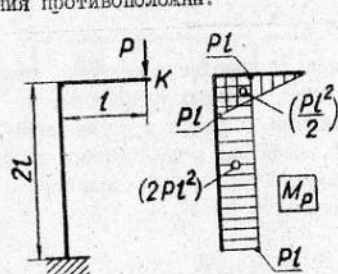


Рис. I.17

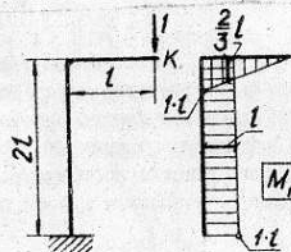


Рис. I.18

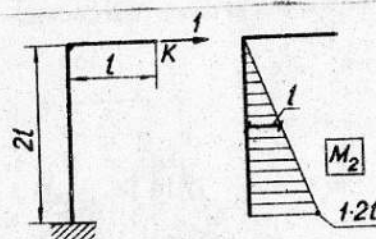


Рис. I.19

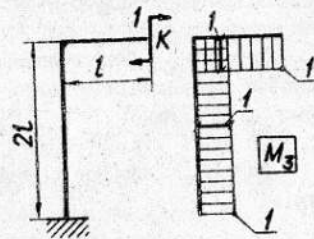


Рис. I.20

Применяя способ Верещагина для вычисления интеграла Мора, будем умножать площадь Ω эпюры M_p каждого участка (указана в скобках) на ординату M_{1c} единичной эпюры (выделена жирной линией), соответствующую положению центра тяжести площади Ω , и делить полученный результат на жесткость участка EI .

Вертикальное перемещение сечения K находим, перемножая эпюры M_p и M_1 :

$$\delta_K^B = \frac{1}{EI} \left[\left(\frac{1}{2} Pl^2 \right) \cdot \frac{2}{3} l + (2Pl^2) \cdot l \right] = \frac{7Pl^3}{3EI} \quad (\text{вниз}).$$

Учитывая, что осевой момент инерции поперечного сечения

$$I = \alpha^4 / 12 = 0,04^4 / 12 = 2,13 \cdot 10^{-7} \text{ м}^4, \quad \text{получаем}$$

$$\delta_K^B = \frac{7Pl^3}{3EI} = \frac{7 \cdot 8000 \cdot 0,2^3}{3 \cdot 2 \cdot 10^4 \cdot 2,13 \cdot 10^{-7}} = 3,5 \cdot 10^{-3} \text{ м} = 3,5 \text{ мм}.$$

Горизонтальное перемещение сечения K находим, перемножая эпюры M_p и M_1 :

$$\delta_K^r = \frac{1}{EI} (2Pl^2) \cdot l = \frac{2Pl^3}{EI} = \frac{2 \cdot 8000 \cdot 0,2^3}{2 \cdot 10^4 \cdot 2,13 \cdot 10^{-7}} = 3 \cdot 10^{-3} \text{ м} = 3 \text{ мм (вправо)}.$$

Полное линейное перемещение сечения K

$$\delta_K = \sqrt{(\delta_K^B)^2 + (\delta_K^r)^2} = \sqrt{3,5^2 + 3,0^2} = 4,6 \text{ мм}.$$

Угловое перемещение сечения K находим, перемножая эпюры M_p и M_3 :

$$\theta = \frac{1}{EI} \left[\left(\frac{1}{2} Pl^2 \right) \cdot 1 + (2Pl^2) \cdot 1 \right] = \frac{5Pl^2}{2EI} = \frac{5 \cdot 8000 \cdot 0,2^2}{2 \cdot 2 \cdot 10^4 \cdot 2,13 \cdot 10^{-7}} =$$

$$\approx 0,019 \text{ рад} \approx 1^\circ \quad (\text{по часовой стрелке}).$$

На рис. I.21 показаны вычисленные перемещения, а также перемещение, вызванное укорочением Δl вертикального стержня вследствие сжатия. Здесь

$$\Delta l = \frac{P \cdot 2l}{EF} = \frac{P \cdot 2l}{E \cdot \alpha^2} = \frac{8000 \cdot 2 \cdot 0,2}{2 \cdot 10^4 \cdot 0,04^2} = 10^{-5} \text{ м} = 0,01 \text{ мм},$$

что составляет лишь около 0,3% от δ_K^B .

Во всех последующих задачах перемещения, вызванные изменением длины стержней вследствие растяжения или сжатия, не учитываются ввиду их малости по сравнению с перемещениями, связанными с изгибом стержней.

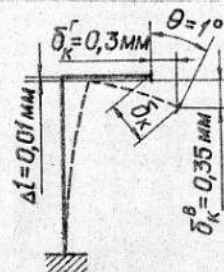


Рис. I.21

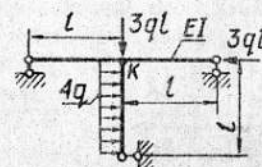


Рис. I.22

Задача I.5. Найти линейное перемещение сечения κ (рис. I.22). Дано: q, l, E, I .

Решение. Линейное перемещение сечения κ

$$\delta_{\kappa} = \sqrt{(\delta_{\kappa}^B)^2 + (\delta_{\kappa}^r)^2}.$$

Для определения вертикального δ_{κ}^B и горизонтального δ_{κ}^r перемещений следует построить эпюры изгибающих моментов от заданной нагрузки и от единичных - вертикальной и горизонтальной - сил, приложенных в сечении κ .

Эпюра изгибающего момента M_p от заданной нагрузки была построена в задаче I.3 (см. рис. I.15) и здесь она показана повторно на рис. I.25.

Нагружаем раму единичной вертикальной силой, находим реакции связей (рис. I.23) и строим эпюру M_1 (рис. I.26).

Нагружаем раму единичной горизонтальной силой, находим реакции связей (рис. I.24) и строим эпюру M_2 (рис. I.27).

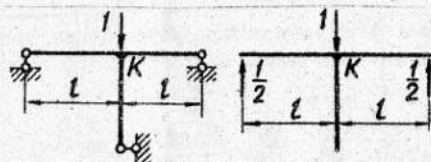


Рис. I.23

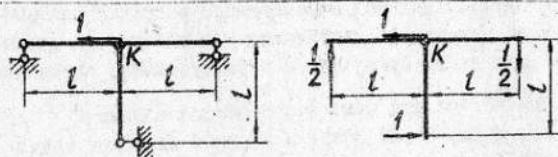


Рис. I.24

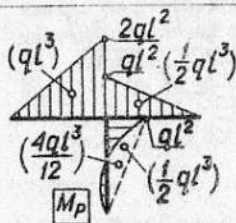


Рис. I.25

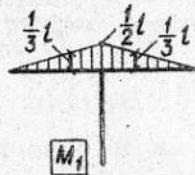


Рис. I.26

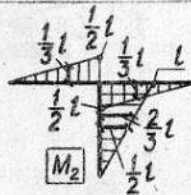


Рис. I.27

Эпюра M_p разбита на три треугольника и параболический сегмент (рис. I.25). Площади элементов разбивки указаны в скобках. Ординаты эпюр M_1 и M_2 , соответствующие положениям центров тяжести площадей эпюры M_p , выделены жирными линиями (рис. I.26, I.27).

Вертикальное перемещение сечения κ находим, перемножая эпюры M_p и M_1 :

$$\delta_{\kappa}^B = \frac{1}{EI} \left[(ql^3) \cdot \frac{1}{3}l + \left(\frac{1}{2}ql^3 \right) \cdot \frac{1}{3}l \right] = \frac{ql^4}{2EI} \quad (\text{вниз}).$$

Горизонтальное перемещение сечения κ находим, перемножая эпюры M_p и M_2 :

$$\delta_{\kappa}^r = \frac{1}{EI} \left[(ql^3) \cdot \frac{1}{3}l - \left(\frac{1}{2}ql^3 \right) \cdot \frac{1}{3}l - \left(\frac{4ql^3}{12} \right) \cdot \frac{1}{2}l + \left(\frac{1}{2}ql^3 \right) \cdot \frac{2}{3}l \right] = \frac{ql^4}{3EI} \quad (\text{влево}).$$

$$\delta_{\kappa} = \sqrt{(\delta_{\kappa}^B)^2 + (\delta_{\kappa}^r)^2} = \frac{ql^4}{EI} \sqrt{\left(\frac{1}{2} \right)^2 + \left(\frac{1}{3} \right)^2} = 0,601 \frac{ql^4}{EI}$$

2. СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМЫЕ ПЛОСКИЕ РАМЫ

Раму называют статически неопределимой, если с помощью уравнений статического равновесия невозможно определить реакции связей или внутренние силовые факторы.

Степень статической неопределимости равна числу дополнительных (лишних) связей, наложенных сверх необходимых связей, которые обеспечивают кинематическую неизменяемость рамы. В последующих задачах рассматривается раскрытие статической неопределимости методом сил. Заданную раму освобождают от лишних связей, заменяя их силовыми факторами, которые определяют из условий отсутствия перемещений по направлению каждой отброшенной связи. Эти условия записывают в виде канонических уравнений, число которых соответствует числу отброшенных связей.

Задача 2.1. Для показанной на рис. 2.1 рамы требуется: 1) раскрыть статическую неопределимость, 2) построить эпюру изгибающего момента, 3) найти вертикальное перемещение сечения κ , 4) проверить решение. Дано: P, l, E, I .

Решение. 1) Раскрытие статической

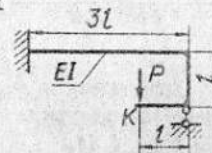


Рис. 2.1

неопределимости. Заданная система (рис. 2.2) один раз статически неопределима, так как имеет 4 связи, реакции которых не могут быть найдены из трех уравнений равновесия. Чтобы получить основную систему, следует снять одну лишнюю связь. Выберем один из вариантов основной системы, удалив опору B (рис. 2.3). Основная система, нагруженная заданной силой P и неизвестной силой X_1 , заменяющей отброшенную связь, становится эквивалентной системой (рис. 2.4), если будет выполнено условие $\delta_{1P} + \delta_{11} X_1 = 0$. Это условие, именуемое каноническим уравнением, отражает отсутствие перемещения по направлению удаленной связи. Здесь δ_{1P} и δ_{11} — перемещения в основной системе по этому направлению соответственно от заданной силы и от силы $X_1 = 1$.

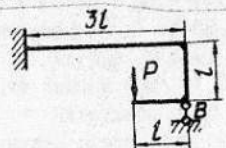


Рис. 2.2

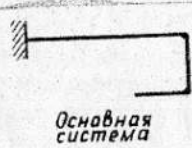


Рис. 2.3

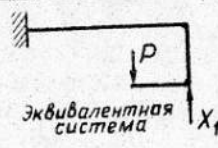


Рис. 2.4

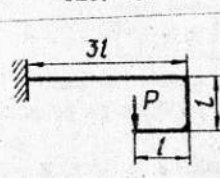


Рис. 2.5

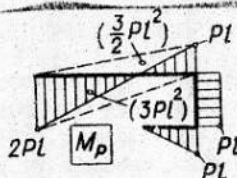


Рис. 2.6

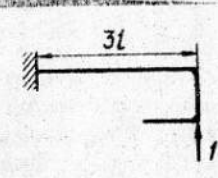


Рис. 2.7

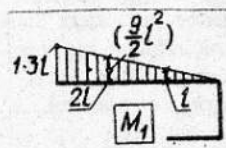


Рис. 2.8

Нагружаем основную систему силой P (рис. 2.5) и строим эпюру изгибающего момента M_P (рис. 2.6), затем нагружаем основную систему единичной силой, приложенной вместо X_1 (рис. 2.7), и строим эпюру изгибающего момента M_1 (рис. 2.8). Приемы построения эпюр были рассмотрены в задачах I.1—I.3.

Коэффициенты δ_{1P} и δ_{11} канонического уравнения вычисляем с помощью интеграла Мора, используя способ Верещагина (см. задачи I.4, I.5).

При вычислении δ_{1P} эпюру M_P на участке $3l$ (рис. 2.6) удобно представить двумя треугольниками (гипотенузы их даны пунктирными линиями). Площади треугольников $\frac{1}{2}Pl \cdot 3l$ и $\frac{1}{2} \cdot 2Pl \cdot 3l$ указаны в скобках. Ординаты l и $2l$ эпюры M_1 (рис. 2.8), соответствующие положениям центров тяжести площадей треугольников эпюры M_P , выделены жирными линиями.

В результате перемножения эпюр M_P и M_1 получаем

$$\delta_{1P} = \frac{1}{EI} \left[\left(\frac{1}{2} Pl^2 \right) l - (3Pl^2) \cdot 2l \right] = -\frac{9Pl^3}{2EI}$$

Для вычисления δ_{11} умножаем эпюру M_1 саму на себя, т.е.

умножаем площадь $\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 3l \cdot 3l = \frac{9}{2} l^2$ эпюры M_1 (рис. 2.8) на ординату $2l$ этой же эпюры, проходящую через центр тяжести площади, и результат делим на жесткость EI :

$$\delta_{11} = \frac{1}{EI} \left(\frac{9}{2} l^2 \right) 2l = \frac{9l^3}{EI}$$

Из канонического уравнения находим

$$X_1 = -\frac{\delta_{1P}}{\delta_{11}} = -\frac{-\frac{9Pl^3}{2EI}}{\frac{9l^3}{EI}} = \frac{1}{2} P$$

Знак плюс указывает, что действительное направление силы X_1 совпадает с показанным на рис. 2.4.

Статическая неопределимость раскрыта.

2) Построение эпюры изгибающего момента. Для этого в эквивалентной системе (рис. 2.4) достаточно заменить неизвестное значение X_1 найденным и затем составить выражения изгибающих моментов в произвольных сечениях каждого участка, как это было подробно показано в задаче I.1.

Другой прием построения эпюры состоит в алгебраическом суммировании ординат эпюры M_P от заданных нагрузок (рис. 2.6) с ординатами эпюры M_{X_1} от нагрузки X_1 . Этот прием удобен в тех случаях, когда суммируемые эпюры линейны.

Нагружая основную систему силой $X_1 = \frac{1}{2} P$ (рис. 2.9), строим эпюру M_{X_1} (рис. 2.10). Эта эпюра представляет собой эпюру M_1 (рис. 2.8), ординаты которой увеличены в X_1 раз. Суммируя на каждом участке концевые ординаты эпюр M_P и M_{X_1} , получаем эпюру изгибающего момента M (рис. 2.11).

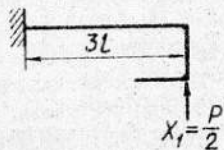


Рис. 2.9

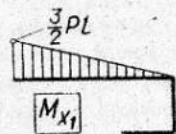


Рис. 2.10

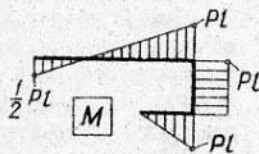


Рис. 2.11

3) Определение вертикального перемещения сечения *к. Перемещения в заданной и эквивалентной системах идентичны, поэтому для определения перемещения какого-либо сечения в заданной системе достаточно найти перемещение этого же сечения в эквивалентной системе.

Нагружаем основную систему вертикальной единичной силой в сечении к (рис. 2.12) и строим эпюру изгибающего момента M_{1k} (рис. 2.13). Выполним разбивку эпюры M , указывая в скобках площади элементов разбивки (рис. 2.14). Ординаты эпюры M_{1k} , соответствующие положениям центров тяжести этих площадей, выделены на рис. 2.13 жирными линиями.



Рис. 2.12

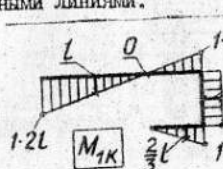


Рис. 2.13

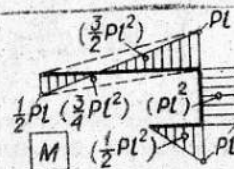


Рис. 2.14

Вертикальное перемещение сечения к находим, перемножая эпюры M и M_{1k} :

$$\delta_k = \frac{1}{EI} \left[\left(\frac{1}{2} Pl^2 \right) \cdot \frac{2}{3} l + (Pl^2) l + \left(\frac{3}{2} Pl^2 \right) \cdot 0 + \left(\frac{3}{4} Pl^2 \right) l \right] = \frac{25Pl^3}{12EI} \quad (\text{вниз}).$$

4) Проверка решения. Один из способов проверки решения состоит в том, что вычисляют перемещение в каком-либо сечении, используя два разных варианта основной системы, и убеждаются в совпадении результатов. Воспользуемся этим способом и найдем вновь вертикальное перемещение сечения к. Выбираем другой вариант

основной системы, заменяя заделку в сечении А шарнирной опорой (рис. 2.15). Нагружаем эту систему в сечении к единичной вертикальной силой (рис. 2.16). С помощью уравнений равновесия находим реакции связей R_A и R_B (рис. 2.17) и строим эпюру изгибающего момента M_{1k}^* (рис. 2.18). На этой эпюре жирными линиями выделены ординаты, соответствующие положениям центров тяжести площадей эпюры M (см. рис. 2.14).



Рис. 2.15

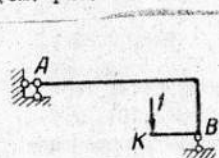


Рис. 2.16

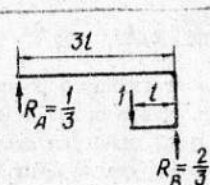


Рис. 2.17

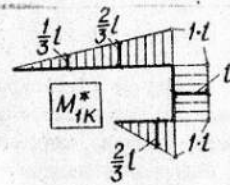


Рис. 2.18

Перемножая эпюры M и M_{1k}^* , получаем

$$\delta_k = \frac{1}{EI} \left[\left(\frac{1}{2} Pl^2 \right) \cdot \frac{2}{3} l + (Pl^2) l + \left(\frac{3}{2} Pl^2 \right) \cdot \frac{2}{3} l - \left(\frac{3}{4} Pl^2 \right) \cdot \frac{1}{3} l \right] = \frac{25Pl^3}{12EI}$$

Этот результат совпадает с полученным выше, что свидетельствует о правильности решения.

Задача 2.2. Для показанной на рис. 2.19 рамы требуется: 1) раскрыть статическую неопределенность, 2) построить эпюру изгибающего момента, 3) проверить решение, 4) найти линейное перемещение сечения к. Дано: q, l, E, I .

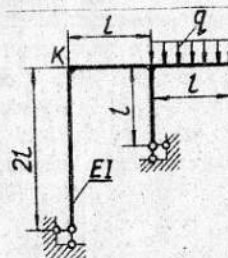


Рис. 2.19

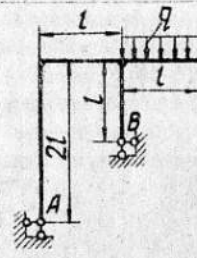


Рис. 2.20

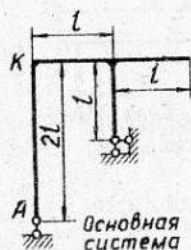


Рис. 2.21

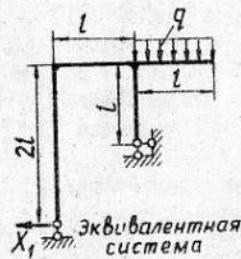


Рис. 2.22

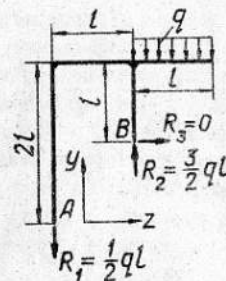


Рис. 2.23

Решение. 1) Раскрытие статической неопределенности. Рама имеет две неподвижные шарнирные опоры А и В (рис. 2.20), т.е. четыре связи и, следовательно, один раз статически неопределима. Выбираем основную систему, удалив одну лишнюю связь, например горизонтальную связь в опоре А (рис. 2.21). Эквивалентная система показана на рис. 2.22. Условие отсутствия перемещения по направлению удаленной связи имеет вид $\delta_p + \delta_{11} \cdot X_1 = 0$.

Нагружаем основную систему заданной нагрузкой, заменяем связи силами R_1, R_2, R_3 (рис. 2.23) и составим уравнения равновесия $\sum M_B = 0, \sum Y = 0, \sum Z = 0$, с помощью которых получаем значения реакций:

$$R_1 = \frac{1}{2}ql, R_2 = \frac{3}{2}ql, R_3 = 0.$$

Строим эпюру изгибающего момента M_p (рис. 2.24).

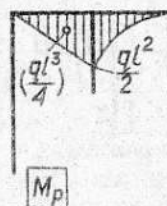


Рис. 2.24

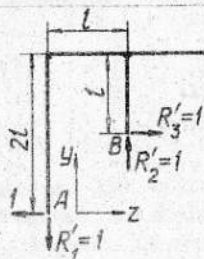


Рис. 2.25

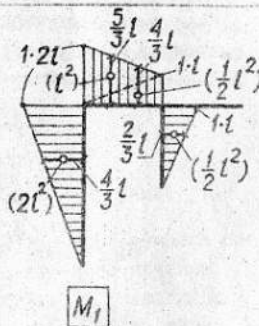


Рис. 2.26

Затем нагружаем основную систему единичной силой, приложенной вместо силы X_1 , заменяем связи силами R'_1, R'_2, R'_3 (рис. 2.25) и составляем уравнения равновесия $\sum M_B = 0, \sum Y = 0, \sum Z = 0$, откуда $R'_1 = 1, R'_2 = 1, R'_3 = 1$.

Строим эпюру изгибающего момента M_1 (рис. 2.26). Переменная соответствующие эпюры, вычисляем коэффициенты δ_{1p} и δ_{11} канонического уравнения:

$$\delta_{1p} = -\frac{1}{EI} \left(\frac{ql^3}{4} \right) \cdot \frac{4}{3}l = -\frac{ql^3}{3EI},$$

$$\delta_{11} = \frac{1}{EI} \left[(2l^2) \cdot \frac{4}{3}l + (l^2) \cdot \frac{5}{3}l + \left(\frac{1}{2}l^2 \right) \cdot \frac{4}{3}l + \left(\frac{1}{2}l^2 \right) \cdot \frac{2}{3}l \right] = \frac{16l^3}{3EI}.$$

Искомая сила

$$X_1 = -\frac{\delta_{1p}}{\delta_{11}} = -\frac{-\frac{ql^3}{3EI}}{\frac{16l^3}{3EI}} = \frac{1}{16}ql.$$

Знак плюс указывает, что действительное направление силы совпадает с указанным на рис. 2.22.

2) Построение эпюры изгибающего момента. Рассмотрим эквивалентную систему (рис. 2.22), заменив неизвестное значение X_1 найденным (рис. 2.27). С помощью уравнений равновесия $\sum M_B = 0, \sum Y = 0, \sum Z = 0$ находим реакции связей:

$$R_A = \frac{9}{16}ql, R_B = \frac{25}{16}ql, H_B = \frac{1}{16}ql.$$

Используя эти значения, строим эпюру изгибающего момента M (рис. 2.28). Дополнительно проверяем равновесие узла С.

3) Проверка решения. В задаче 2.1 был рассмотрен один из способов проверки решения. Другой способ заключается в том, что эпюру M используют для вычисления перемещения по направлению какой-либо связи, зная, что это перемещение заведомо равно нулю. Найдём, например, δ_B — горизонтальное перемещение сечения В (см. рис. 2.20) и убедимся, что $\delta_B = 0$. С этой целью выберем другую основную систему, удалив горизонтальную связь в опоре В (рис. 2.29).

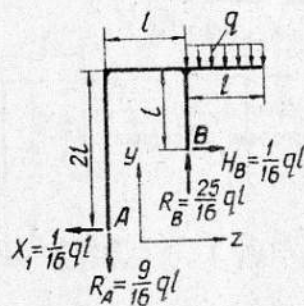


Рис. 2.27

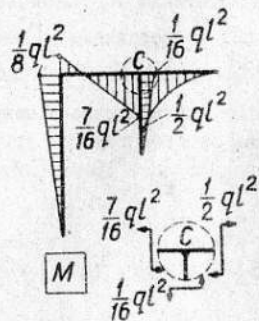


Рис. 2.28

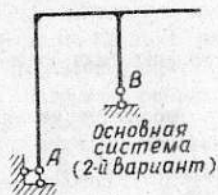


Рис. 2.29

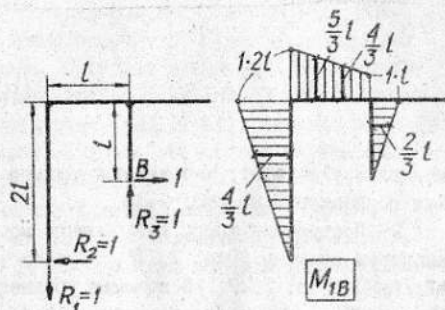


Рис. 2.30

Рис. 2.31

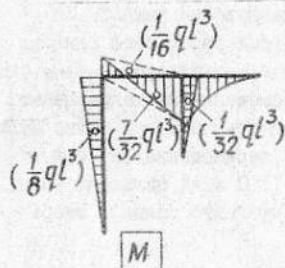


Рис. 2.32

Приложим к этой основной системе по направлению отброшенной связи единичную силу (горизонтальная сила в сечении B на рис. 2.30) и с помощью уравнений равновесия найдем реакции опор: $R_1=1$, $R_2=1$, $R_3=1$. Строим эпюру изгибающего момента M_{1B} (рис. 2.31).

Выполняем разбивку эпюры M (рис. 2.32) и, перемножая эпюры M и M_{1B} , определяем горизонтальное перемещение сечения B:

$$\delta_B = \frac{1}{EI} \left[\left(\frac{1}{8} ql^2 \right) \cdot \frac{4}{3} l + \left(\frac{1}{16} ql^2 \right) \cdot \frac{5}{3} l - \left(\frac{7}{32} ql^2 \right) \cdot \frac{4}{3} l + \left(\frac{1}{32} ql^2 \right) \cdot \frac{2}{3} l \right] = 0.$$

4) Линейное перемещение сечения κ

$$\delta_\kappa = \sqrt{(\delta_\kappa^0)^2 + (\delta_\kappa^r)^2}.$$

Вертикальное перемещение δ_κ^0 сечения κ (см. рис. 2.19), связанное с удлинением стержня $2l$, весьма мало и поэтому не учитывается (см. пояснения к рис. 1.21 в задаче 1.4). Чтобы найти горизонтальное перемещение δ_κ^r , нагружаем основную систему (рис. 2.21) в сечении κ горизонтальной единичной силой (рис. 2.33) и находим реакции связей: $R_1=1$, $R_2=1$, $R_3=1$.

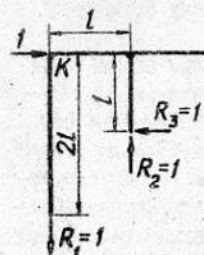


Рис. 2.33

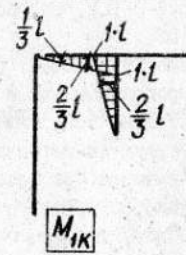


Рис. 2.34

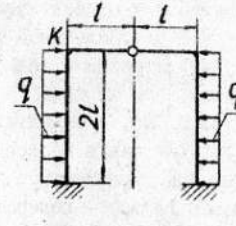


Рис. 2.35

Строим эпюру изгибающего момента $M_{1\kappa}$ (рис. 2.34) и, перемножая ее с эпюрой M (рис. 2.32), определяем искомое перемещение

$$\delta_\kappa^r = \delta_\kappa = \frac{1}{EI} \left[\left(\frac{1}{16} ql^2 \right) \cdot \frac{1}{3} l + \left(\frac{7}{32} ql^2 \right) \cdot \frac{2}{3} l - \left(\frac{1}{32} ql^2 \right) \cdot \frac{2}{3} l \right] = \frac{5ql^4}{48EI}.$$

Знак плюс указывает, что направление перемещения совпадает с направлением единичной силы.

Задача 2.3. Для показанной на рис. 2.35 рамы требуется:

1) раскрыть статическую неопределенность, 2) построить эпюру изгибающего момента, 3) проверить решение, 4) найти угловое перемещение сечения κ . Дано: q , l , E , I .

Решение. 1) Раскрытие статической неопределенности. Рама имеет шесть внешних связей в сечениях A и C (рис. 2.36). При наличии шарнира B эта рама дважды статически неопределима. Чтобы получить основную систему, следует снять две лишние связи.

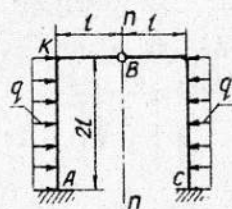


Рис. 2.36



Рис. 2.37

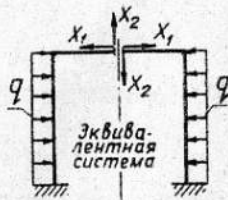


Рис. 2.38

В задачах 2.1 и 2.2 мы получали основные системы, освобождая рамы от лишних внешних связей. В этой задаче выберем основную систему, удалив шарнир В, т.е. освободим раму от двух внутренних связей (рис. 2.37).

В эквивалентной системе (рис. 2.38) удаленные связи заменены внутренними силами: продольными X_1 и поперечными X_2 . Отметим, что шарнир В находится на оси симметрии $n-n$ рамы (см. рис. 2.36), и заданная нагрузка симметрична относительно этой оси. Так как в поперечном сечении, расположенном на оси симметрии при симметричной нагрузке, отсутствует кососимметричный силовой фактор — поперечная сила, то $X_2 = 0$, и задача может быть решена с помощью одного канонического уравнения $\delta_{1P} + \delta_{11} X_1 = 0$. Это уравнение отражает отсутствие взаимного линейного перемещения в продольном направлении двух сечений, расположенных по обе стороны удаленного шарнира.

В последующих расчетах, учитывая симметрию, целесообразно рассматривать половину рамы (рис. 2.39).

Нагружаем основную систему заданными силами (рис. 2.40) и строим эпюру изгибающего момента M_P (рис. 2.41). Затем нагружаем основную систему единичной силой, приложенной вместо силы X_1 (рис. 2.42), и строим эпюру изгибающего момента M_1 (рис. 2.43).

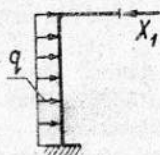


Рис. 2.39

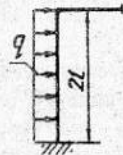


Рис. 2.40

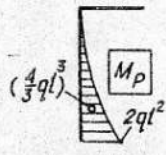


Рис. 2.41

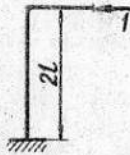


Рис. 2.42

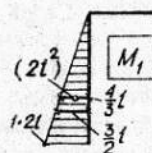


Рис. 2.43

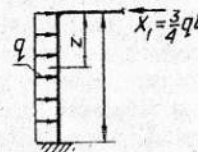


Рис. 2.44

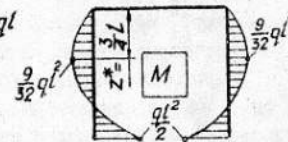


Рис. 2.45

Перемножая соответствующие эпюры, вычисляем коэффициенты канонического уравнения:

$$\delta_{1P} = -\frac{1}{EI} \left(\frac{4}{3} ql^2 \right) \frac{3}{2} l = -\frac{2ql^3}{EI},$$

$$\delta_{11} = \frac{1}{EI} (2l^2) \cdot \frac{4}{3} l = \frac{8l^3}{3EI}.$$

Определяем из канонического уравнения значение неизвестной силы

$$X_1 = -\frac{\delta_{1P}}{\delta_{11}} = -\frac{-\frac{2ql^3}{EI}}{\frac{8l^3}{3EI}} = \frac{3}{4} ql.$$

Знак плюс указывает, что выбранное направление X_1 (рис. 2.39) совпадает с действительным.

2) Построение эпюры изгибающего момента. Заменяем в эквивалентной системе неизвестное значение X_1 найденным (рис. 2.44). Изгибающий момент в сечении с абсциссой z

$$M = \frac{3}{4} ql \cdot z - \frac{qz^2}{2}.$$

Здесь знак плюс соответствует ординатам, отложенным с наружной стороны рамы.

Исследуем функцию M на экстремум:

$$\frac{dM}{dz} = \frac{3}{4} ql - qz = 0, \quad z = z^* = \frac{3}{4} l,$$

$$M_{\max} = \frac{3}{4} ql \cdot \frac{3}{4} l - \frac{q}{2} \left(\frac{3}{4} l \right)^2 = \frac{9}{32} ql^2.$$

Учитывая, что $M=0$ при $z=0$ и $M=-ql^2/2$ при $z=2l$, строим эпюру изгибающего момента (рис. 2.45). Эпюра для правой части строится с учетом симметрии.

3) Проверку решения выполним, как и в задаче 2.2, используя эпюру M для вычисления перемещения по направлению какой-либо связи. Найдем, например, δ_c^r — горизонтальное перемещение в опоре C (см. рис. 2.36) и убедимся, что $\delta_c^r = 0$. Удалим в опоре C горизонтальную и угловую связи, к полученной основной системе (рис. 2.46) приложим единичную силу по направлению отброшенной горизонтальной связи (рис. 2.47).

С помощью уравнений равновесия находим реакции опор (рис. 2.48) и строим эпюру изгибающего момента M_{1c} (рис. 2.49).

Выполняем разбивку площади эпюры M (рис. 2.50), представляя ее как алгебраическую сумму площади сегмента ($\frac{2}{3}ql^3$) и площади треугольника ($\frac{1}{2}ql^3$).

Определяем горизонтальное перемещение сечения C , перемножая эпюры M и M_{1c} :

$$\delta_c = \frac{1}{EI} \left[-\left(\frac{2}{3}ql^3\right) \cdot 3l + \left(\frac{1}{2}ql^3\right) \cdot \frac{10}{3}l + \left(\frac{2}{3}ql^3\right) \cdot l - \left(\frac{1}{2}ql^3\right) \cdot \frac{2}{3}l \right] = 0.$$

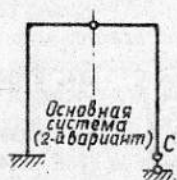


Рис. 2.46

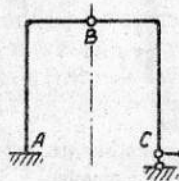


Рис. 2.47

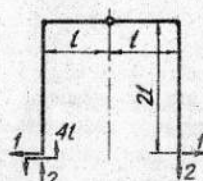


Рис. 2.48

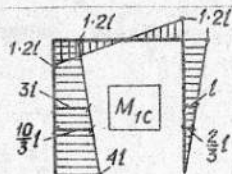


Рис. 2.49

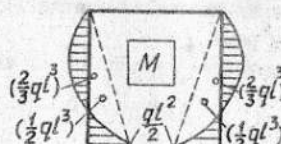


Рис. 2.50

4) Определение углового перемещения сечения κ . Используем какой-либо из вариантов основной системы, например, первоначальный (см. рис. 2.37).

Нагружаем основную систему в сечении κ единичным моментом (рис. 2.51). Строим эпюру изгибающего момента $M_{1\kappa}$ (рис. 2.52) и, перемножая ее с эпюрой M (см. рис. 2.50), определяем угловое перемещение сечения κ :

$$\Theta_\kappa = \frac{1}{EI} \left[\left(-\frac{2}{3}ql^3\right) \cdot 1 + \left(\frac{1}{2}ql^3\right) \cdot 1 \right] = \frac{ql^3}{6EI}.$$

Знак плюс указывает, что направление перемещения совпадает с направлением единичной пары сил.

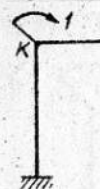


Рис. 2.51



Рис. 2.52

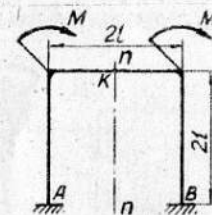


Рис. 2.53

Задача 2.4. Для показанной на рис. 2.53 рамы требуется:

1) раскрыть статическую неопределимость, 2) построить эпюру изгибающего момента, 3) проверить решение, 4) найти угловое перемещение сечения κ . Дано: M, l, E, I .

Решение. 1) Раскрытие статической неопределимости. Рама имеет шесть внешних связей в сечениях A и B (рис. 2.53) и, следовательно, трижды статически неопределима. Чтобы получить основную систему, следует снять три лишние связи. Этого можно достичь, в частности, разрезав раму в каком-либо сечении (рис. 2.54), т.е. снимая три внутренние связи. При таком варианте основной системы неизвестными оказываются три внутренних силовых фактора, а канонические уравнения для эквивалентной системы (рис. 2.55) отражают отсутствие трех взаимных перемещений сечений в месте разреза: продольного, поперечного и углового.

Так как контур рамы симметричен относительно оси $n-n$ (см. рис. 2.53), а заданная нагрузка кососимметрична относительно этой же оси, то выбирая основную систему, целесообразно сделать разрез по оси симметрии, как показано на рис. 2.54. В этом

сечении отсутствуют симметричные силовые факторы — продольная сила X_2 и изгибающий момент X_3 (рис. 2.55), поэтому статическая неопределимость раскрывается с помощью одного канонического уравнения $\delta_{1P} + \delta_{11} X_1 = 0$, которое отражает отсутствие взаимного линейного перемещения сечений вдоль оси $n-n$, т.е. в поперечном направлении.

В последующих расчетах достаточно рассматривать половину рамы (рис. 2.56).

Нагружаем основную систему заданной парой сил (рис. 2.57) и строим эпюру изгибающего момента M_P (рис. 2.58). Затем нагружаем основную систему единичной силой, приложенной вместо X_1 (рис. 2.59), и строим эпюру изгибающего момента M_1 (рис. 2.60).



Рис. 2.54

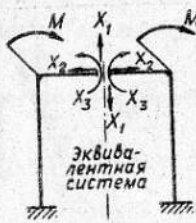


Рис. 2.55



Рис. 2.56



Рис. 2.57

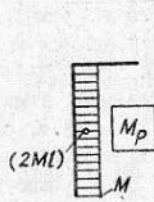


Рис. 2.58



Рис. 2.59

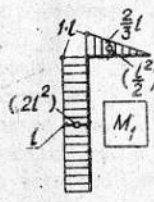


Рис. 2.60

Перемножая соответствующие эпюры, вычисляем коэффициенты канонического уравнения:

$$\delta_{1P} = -\frac{1}{EI} (2Me) \cdot e = -\frac{2Me^2}{EI},$$

$$\delta_{11} = \frac{1}{EI} \left[(2e^2) \cdot e + \left(\frac{1}{2} e^2 \right) \cdot \frac{2}{3} e \right] = \frac{7e^3}{3EI}.$$

Определяем из канонического уравнения значение поперечной силы

$$X_1 = -\frac{\delta_{1P}}{\delta_{11}} = -\frac{-\frac{2Me^2}{EI}}{\frac{7e^3}{3EI}} = \frac{6M}{7e}.$$

Знак плюс указывает, что выбранное направление X_1 (рис. 2.56) совпадает с действительным.

2) Построение эпюры изгибающего момента. Заменяем в эквивалентной системе неизвестное значение X_1 найденным (рис. 2.61). Используя приемы, рассмотренные в задачах I.1—I.3, строим эпюру изгибающего момента M (рис. 2.62). Построение выполняется для левой части рамы, а эпюра для правой части вычерчивается с учетом косой симметрии.

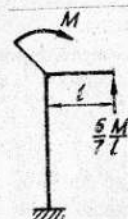


Рис. 2.61

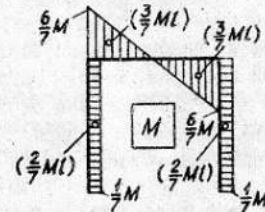


Рис. 2.62

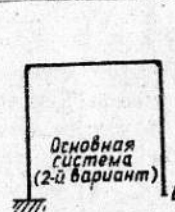


Рис. 2.63

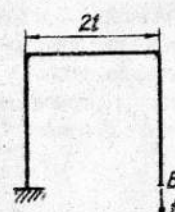


Рис. 2.64

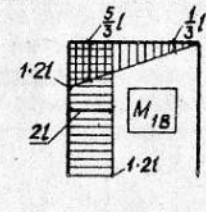


Рис. 2.65

3) Проверку решения выполним, используя эпюру M для определения заведомо отсутствующего перемещения, например вертикального перемещения сечения B (рис. 2.63).

Выберем основную систему, удалив три связи в сечении B (рис. 2.63). Приложим в этом сечении единичную вертикальную си-

лу (рис. 2.64) и построим эпюру изгибающего момента M_{1k} (рис. 2.65).

Перемножая эпюры M и M_{1k} , убедимся, что сечение B не получает вертикального перемещения:

$$\delta_B = \frac{1}{EI} \left[\left(\frac{2}{7} Ml \right) \cdot 2l - \left(\frac{3}{7} Ml \right) \cdot \frac{5l}{3} + \left(\frac{2}{7} Ml \right) \cdot \frac{1}{3} l \right] = 0.$$

Следует отметить, что в этом варианте основной системы (рис. 2.63) попытка выполнить проверку, определяя перемещение сечения B по направлению горизонтальной связи, окажется несостоятельной. Нетрудно установить, что эпюра M_{1k} будет в этом случае симметричной относительно оси $n-n$, в то время как проверяемая эпюра M относительно той же оси кососимметрична. Перемножение таких эпюр всегда дает нуль независимо от значений их ординат и, следовательно, не может служить проверкой.

4) Определение углового перемещения сечения K . Используем какой-либо из рассмотренных вариантов основной системы, например второй (см. рис. 2.63). Нагружаем раму в сечении K единичной парой сил (рис. 2.66) и строим эпюру изгибающего момента M_{1k} (рис. 2.67). Перемножая эпюры M_{1k} и M (см. рис. 2.62), получаем угловое перемещение сечения

$$\Theta_K = \frac{1}{EI} \left[- \left(\frac{2}{7} Ml \right) \cdot 1 + \left(\frac{3}{7} Ml \right) \cdot 1 \right] = \frac{Ml^2}{7EI}.$$

Знак плюс указывает, что направление перемещения совпадает с направлением единичного момента.

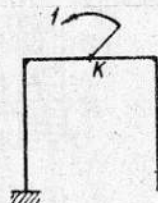


Рис. 2.66

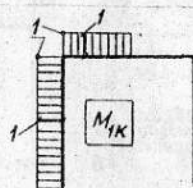


Рис. 2.67

Задача 2.5. Для показанной на рис. 2.68 рамы требуется: 1) раскрыть статическую неопределенность, 2) построить эпюру изгибающего момента, 3) проверить решение, 4) найти взаимное линейное перемещение сечений K . Дано: P, l, E, I .

Решение. 1) Раскрытие статической неопределенности. Плоская

рама с замкнутым контуром трижды статически неопределима. Если снять три внутренние связи, разрезав раму в каком-либо сечении, то получим основную систему (рис. 2.69). В общем случае удаленные связи следует заменить тремя неизвестными внутренними силовыми факторами, представляющими собой продольную силу, поперечную силу и изгибающий момент (см., например, рис. 2.55 к задаче 2.4).

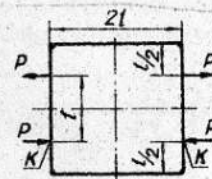


Рис. 2.68

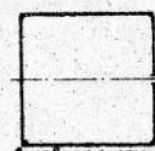


Рис. 2.69

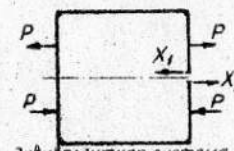


Рис. 2.70

В данном случае контур рамы симметричен относительно двух осей, а нагрузка симметрична относительно вертикальной оси и кососимметрична относительно горизонтальной оси. В сечении на вертикальной оси симметрии отсутствует поперечная сила, а в сечении на горизонтальной оси симметрии — продольная сила и изгибающий момент. Очевидно, что целесообразно получить основную систему, разрезая раму в сечении на горизонтальной оси симметрии (рис. 2.69), так как в этом варианте эквивалентная система (рис. 2.70) содержит только одну неизвестную поперечную силу X_1 . Для раскрытия статической неопределенности достаточно составить и решить одно каноническое уравнение, которое отражает отсутствие взаимного поперечного перемещения сечений в месте разреза:

$$\delta_{11} + \delta_{11} X_1 = 0.$$

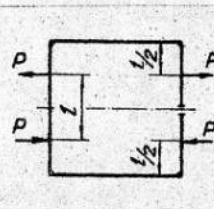


Рис. 2.71

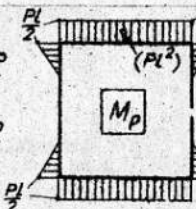


Рис. 2.72

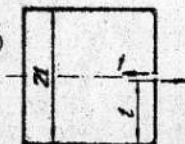


Рис. 2.73

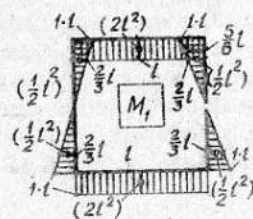


Рис. 2.74

$$\delta_{1P} = -\frac{1}{EI} \left[\left(\frac{1}{8} Pl^2 \right) \cdot \frac{5}{6} l + (Pl^2) l \right] = -\frac{29Pl^3}{12EI}$$

$$\delta_{11} = \frac{1}{EI} \left[\left(\frac{1}{2} l^2 \right) \cdot \frac{2}{3} l + (2l^2) l \right] = \frac{16l^3}{3EI}$$

Поперечная сила

$$X_1 = -\frac{\delta_{1P}}{\delta_{11}} = -\frac{-\frac{29Pl^3}{12EI}}{\frac{16l^3}{3EI}} = \frac{29}{64} P$$

Знак плюс указывает, что выбранное направление X_1 (рис. 2.70) совпадает с действительным.

2) Построение эпюры изгибающего момента. Заменим в эквивалентной системе неизвестное значение X_1 найденным (рис. 2.75). Чтобы получить эпюру M (рис. 2.76), достаточно построить эпюру на участках AB , BC и CD (рис. 2.75), т.е. на четверти контура рамы, а затем отобразить ее симметрично вертикальной и кососимметрично относительно горизонтальной осей симметрии.

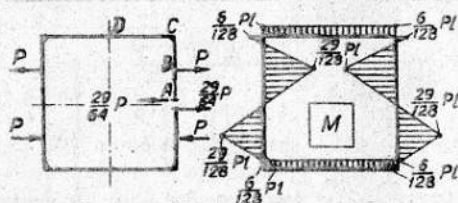


Рис. 2.75

Рис. 2.76

Нагружаем основную систему заданными силами (рис. 2.71) и строим эпюру изгибающего момента M_P (рис. 2.72). Затем нагружаем основную систему единичными силами, заменяющими силы X_1 (рис. 2.73), и строим эпюру M_1 (рис. 2.74).

Перемножая соответствующие эпюры, вычисляем коэффициенты канонического уравнения:



Рис. 2.77

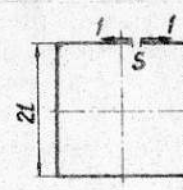


Рис. 2.78

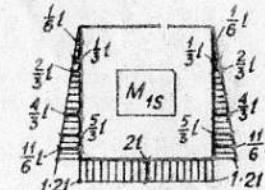


Рис. 2.79

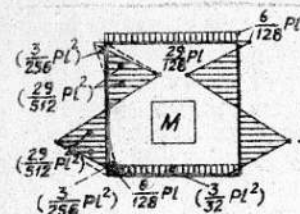


Рис. 2.80

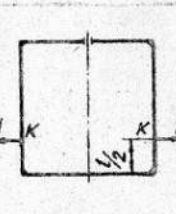


Рис. 2.81

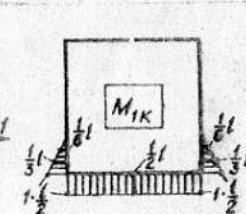


Рис. 2.82

3) Проверка решения. Определим, используя эпюру M , перемещение, которое заведомо отсутствует, чтобы убедиться, что в результате получается нуль. Разрежем раму в произвольном сечении S (рис. 2.77) и получим новый вариант основной системы. Покажем, что взаимное продольное перемещение сечений в месте разреза равно нулю. Нагружаем раму в сечении S двумя противоположно направленными продольными единичными силами (рис. 2.78) и строим эпюру M_{1S} (рис. 2.79). Выполняем разбивку площади эпюры M (рис. 2.80) и, перемножая эпюры M и M_{1S} , определяем взаимное перемещение сечений S :

$$\delta = \frac{1}{EI} \left[\left(\frac{3}{256} Pl^2 \right) \cdot \frac{1}{6} l + \left(\frac{29}{512} Pl^2 \right) \cdot \frac{1}{3} l + \left(\frac{29}{512} Pl^2 \right) \cdot \frac{2}{3} l + \left(\frac{3}{256} Pl^2 \right) \cdot \frac{1}{6} l \right] = 0$$

4) Определение взаимного линейного перемещения сечений K . При заданной нагрузке (см. рис. 2.68) все перемещения симметричны относительно вертикальной оси симметрии контура рамы, поэтому сечения K могут иметь только взаимное горизонтальное перемещение.

Воспользуемся одним из вариантов основной системы (рис. 2.81). Нагружаем раму в сечениях κ двумя горизонтальными противоположно направленными единичными силами и строим эпюры $M_{\kappa\kappa}$ (рис. 2.82). Перемножая эпюры M и $M_{\kappa\kappa}$, находим взаимное линейное перемещение сечений

$$\delta_{\kappa\kappa} = \frac{1}{EI} \left[\left(\frac{29}{512} Pl^2 \right) \cdot \frac{1}{6} l \cdot 2 - \left(\frac{3}{256} Pl^2 \right) \cdot \frac{1}{3} l \cdot 2 - \left(\frac{3}{32} Pl^2 \right) \cdot \frac{1}{2} l \right] = -\frac{55 Pl^3}{1536 EI}$$

Знак минус указывает, что действительные перемещения сечений κ противоположны направлениям единичных сил (рис. 2.81), т.е. сечения κ взаимно сближаются.

Задача 2.6. Для указанной на рис. 2.83 рамы требуется раскрыть статическую неопределенность, найти угловое перемещение сечений 1-5 и линейные перемещения сечений 3-5. Дано: P, l, E, I .

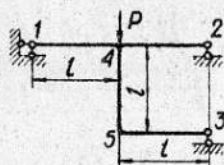


Рис. 2.83

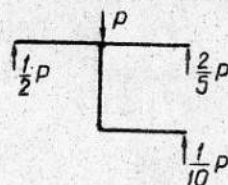


Рис. 2.84

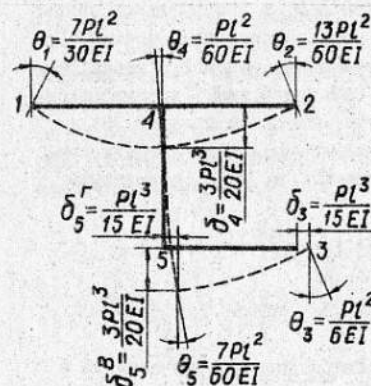


Рис. 2.85

Эту задачу следует использовать для самостоятельной работы. После раскрытия статической неопределенности можно проверить выполненные расчеты по рис. 2.84, а результат определения какого-либо взятого на выбор перемещения можно сравнить с приведенными на рис. 2.85 значениями угловых и линейных перемещений.

Бесплатно

кафедра Рк-5

Министерство высшего и среднего специального образования СССР

Московское ордена Ленина, ордена Октябрьской Революции
и ордена Трудового Красного Знамени
высшее техническое училище им. Н. Э. Баумана

И. Д. КИСЕНКО, Б. В. МИНЕНКОВ

РАСЧЕТ ПЛОСКИХ РАМ

Методические указания
для студентов вечернего факультета
по курсу «Сопротивление материалов»