

Министерство высшего и среднего специального образования СССР
Московское ордена Ленина, ордена Октябрьской Революции
и ордена Трудового Красного Знамени
высшее техническое училище им. Н. Э. Баумана

А. С. Газарян, Л. Г. Парилова, В. Н. Шитиков

КРУЧЕНИЕ И СЛОЖНОЕ НАПРЯЖЕННОЕ СОСТОЯНИЕ

Методические указания к выполнению домашнего задания
по курсу «Сопротивление материалов»

Министерство высшего и среднего специального образования СССР

Московское ордена Ленина, ордена Октябрьской Революции и
ордена Трудового Красного Знамени
высшее техническое училище им. Н.Э.Баумана

А.С.Газарян, Л.Г.Парилова, В.Н.Шитиков

Утверждены
редсоветом МВТУ

КРУЧЕНИЕ И СЛОЖНОЕ НАПРЯЖЕННОЕ СОСТОЯНИЕ

Методические указания
к выполнению домашнего задания
по курсу "Сопротивление материалов"

Под редакцией Э.М.Конюшко

Данные методические указания издаются в соответствии с учебным планом.

Рассмотрены и одобрены кафедрой К-5 19.12.80 г., Методической комиссией факультета К и Учебно-методическим управлением.

Рецензент к.т.н. доц. Хавов В.М.

Графические работы выполнены И.Д.Кисенко

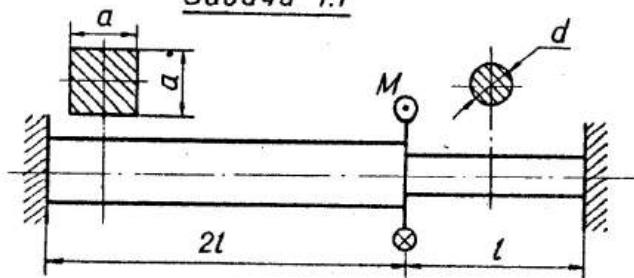
© Московское высшее техническое училище им. Н.Э.Баумана

Настоящие указания предназначены для студентов дневного и вечернего отделений и содержат образцы выполнения расчетно-графических домашних заданий по разделу "Кручение и сложное напряженное состояние".

При работе над домашним заданием следует учитывать общие рекомендации и указания по выполнению расчетно-графических работ, изложенные в разработке А.С.Газарян, Г.П.Клюева, Н.А.Сухова. Расчетно-графические работы по сопротивлению материалов. Растяжение - сжатие. - М.: Изд. МВТУ, 1980.

1. Кручение

Задача 1.1



Определить размер a из условия равнопрочности участков бруса, изображенного выше.

Определить допускаемую величину момента $M_{\text{доп}}$, используя метод расчета по допускаемым напряжениям. Найти предельное значение момента $M_{\text{пред}}$. Материал бруса идеальный упруго-пластичный.

Построить эпюры крутящих моментов M_k , наибольших касательных напряжений τ_{max} и углов поворота сечений φ при $M = M_{\text{доп}}$.

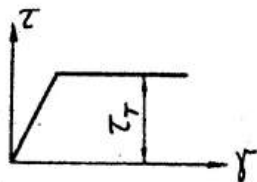
Дано: $\tau_T = 240 \text{ МПа}$;

$n_T = 2,0$;

$d = 100 \text{ мм}$;

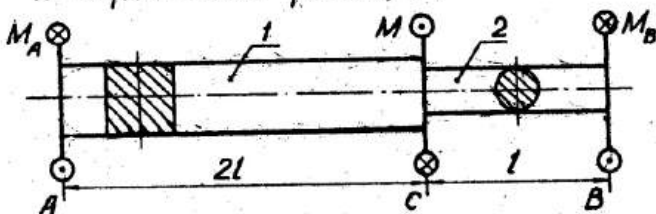
$l = 1 \text{ м}$;

$G = 8 \cdot 10^4 \text{ МПа}$.



Решение

1. Определение размера a



а) Уравнение равновесия

$$M_A + M_B = M.$$

Задача один раз статически неопределима.

б) Уравнение перемещений

$$\varphi_{сд} = \varphi_{св}, \quad \frac{M_A \cdot 2l}{GJ_{K1}} = \frac{M_B \cdot l}{GJ_{K2}};$$

$$J_{K1} = \rho a^4 = 0,141 a^4, \quad J_{K2} = J_{p2} = \frac{\pi d^4}{32};$$

$$\frac{M_A \cdot 2l}{G \cdot 0,141 a^4} = \frac{M_B l}{G \cdot \frac{\pi d^4}{32}}, \quad M_A = M_B \cdot 0,718 \frac{a^4}{d^4}. \quad (1)$$

в) Условие равнопрочности

$$\tau_{max1} = \tau_{max2}; \quad \tau_{max} = \frac{M_i}{W_{Ki}};$$

$$W_{K1} = \alpha a^3 = 0,208 a^3, \quad W_{K2} = W_{p2} = \frac{\pi d^3}{16};$$

$$\frac{M_A}{0,208 a^3} = \frac{M_B \cdot 16}{\pi d^3}; \quad \text{с учетом зависимости (1)}$$

$$\frac{M_B \cdot 0,718 \frac{a^4}{d^4}}{0,208 a^3} = \frac{M_B \cdot 16}{\pi d^3}; \quad a = 1,475 d.$$

$$a = 1,475 \cdot 100 = 147,5 \text{ мм} \approx 148 \text{ мм}.$$

2. Определение $M_{доп}$

а) Условие прочности $\tau_{max} \leq \frac{\tau_T}{n_T}$;

$$\tau_{max2} = \frac{M_B}{W_{K2}} = \frac{\tau_T}{n_T};$$

$$M_B = \frac{\tau_T W_{K2}}{n_T} = \frac{240 \cdot 10^6 \cdot \pi \cdot 0,1^3}{2 \cdot 16} = 2,36 \cdot 10^4 \text{ Н}\cdot\text{м}.$$

$$\text{Из (1)} \quad M_A = M_B \cdot 0,718 \frac{a^4}{d^4} =$$

$$= 2,36 \cdot 10^4 \cdot 0,718 \left(\frac{0,148}{0,1} \right)^4 = 8,13 \cdot 10^4 \text{ Н}\cdot\text{м}.$$

б) Уравнение равновесия

$$M_A + M_B = M_{доп};$$

$$M_{доп} = 8,13 \cdot 10^4 + 2,36 \cdot 10^4 = 10,49 \cdot 10^4 \text{ Н}\cdot\text{м}.$$

3. Построение эпюр M_K , τ_{max} , φ

а) Крутящие моменты

$$M_1 = M_A = 8,13 \cdot 10^4 \text{ Н}\cdot\text{м},$$

$$M_2 = M_B = 2,36 \cdot 10^4 \text{ Н}\cdot\text{м}.$$

б) Наибольшие касательные напряжения

$$\tau_{max1} = \frac{M_1}{W_{K1}} = \frac{8,13 \cdot 10^4}{0,208 \cdot (0,148)^3} = 120 \cdot 10^6 \frac{\text{Н}}{\text{м}^2} = 120 \text{ МПа},$$

$$\tau_{max2} = \frac{M_2}{W_{K2}} = \frac{2,36 \cdot 10^4 \cdot 16}{\pi \cdot 0,1^3} = 120 \cdot 10^6 \frac{\text{Н}}{\text{м}^2} = 120 \text{ МПа}.$$

в) Углы поворота сечений

$$\varphi_A = 0;$$

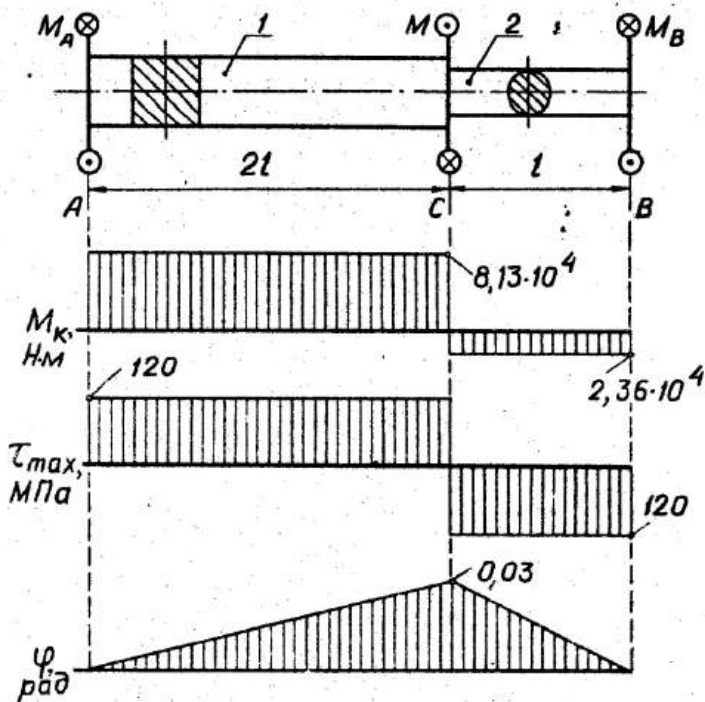
$$\varphi_1 = \varphi_A + \int_0^{z_1} \frac{M_1 dz}{GJ_{K1}} = \varphi_A + \frac{M_1 z_1}{GJ_{K1}}; \quad z_1 \in [0, 2l]$$

$$\varphi_1|_{z_1=0} = \varphi_A = 0;$$

$$\varphi_C = \varphi_1|_{z_1=2l} = \varphi_A + \frac{M_1 2l}{GJ_{K1}} = \frac{8,13 \cdot 10^4 \cdot 2 \cdot 1}{8 \cdot 10^{10} \cdot 0,141 \cdot 0,148^4} = 0,03 \text{ рад};$$

$$\varphi_2 = \varphi_C + \int_0^{z_2} \frac{M_2 dz}{GJ_{K2}} = \varphi_C + \frac{M_2 z_2}{GJ_{K2}}; \quad z_2 \in [0, 1]$$

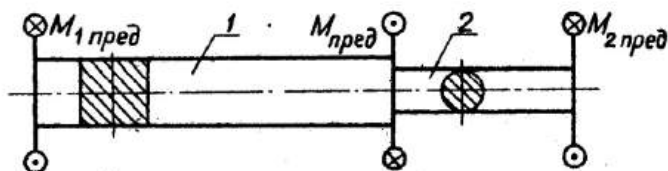
$$\varphi_B = \varphi_2|_{z_2=1} = \varphi_C + \frac{M_2 l}{GJ_{K2}} = 0,03 - \frac{2,36 \cdot 10^4 \cdot 1 \cdot 32}{8 \cdot 10^{10} \cdot \pi \cdot 0,14} = 0.$$



4. Определение предельного момента $M_{пред}$

Конструкция потеряет несущую способность, когда сечения первого и второго участков будут полностью охвачены пластическими деформациями, т.е.

$$M_1 = M_{1 пред} \quad M_2 = M_{2 пред}.$$



Для квадратного сечения

$$M_{1 пред} = \frac{\tau_T Q^3}{3},$$

для круглого сечения

$$M_{2 пред} = \frac{\tau_T \pi d^3}{12}.$$

Тогда

$$M_{1 пред} = \frac{240 \cdot 10^6 \cdot 0,148^3}{3} = 259 \cdot 10^3 \text{ Н}\cdot\text{м},$$

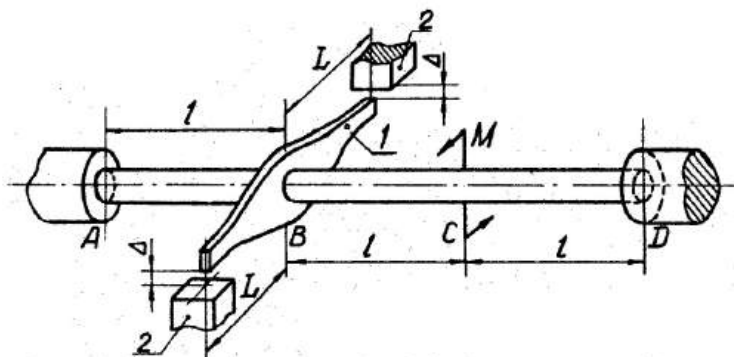
$$M_{2 пред} = \frac{240 \cdot 10^6 \cdot \pi \cdot 0,1^3}{12} = 62,8 \cdot 10^3 \text{ Н}\cdot\text{м}.$$

Уравнение равновесия

$$M_{пред} = M_{1 пред} + M_{2 пред} =$$

$$= 259 \cdot 10^3 + 62,8 \cdot 10^3 = 321,8 \cdot 10^3 \approx 322 \cdot 10^3 \text{ Н}\cdot\text{м}.$$

Задача 1.2



Валик AD , зашеченный пр концам и имеющий кругое поперечное сечение диаметром d , нагружается парой сил M . При этом жесткий рычаг 1, зашеченный в сечении B , упирается в ограничители 2.

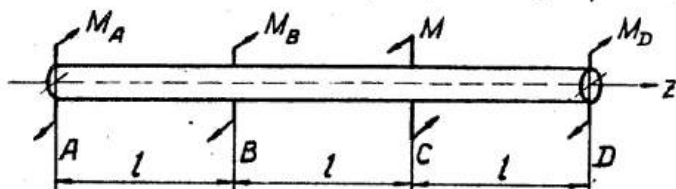
Построить эпюры крутящих моментов M_k и угол поворота сечений φ . Определить коэффициент запаса по текучести P_T .

Дано: $M = 25 \text{ Н}\cdot\text{м},$
 $l = 0,2 \text{ м},$
 $d = 10 \text{ мм},$
 $L = 0,1 \text{ м},$
 $\Delta = 1 \text{ мм},$
 $G = 8 \cdot 10^4 \text{ МПа},$
 $\tau_T = 150 \text{ МПа}.$

Решение

1. Раскрытие статической неопределёмости

При упоре рычага 1 в ограничитель 2 на валик AD в сечении B передается пара сил M_B



Уравнение статического равновесия

$$\sum M_z = 0, \quad -M_A - M_B + M - M_D = 0. \quad (1)$$

Задача дважды статически неопределима.

Уравнения перемещений

$$\varphi_B = \frac{\Delta}{L}, \quad \frac{[M - (M_B + M_D)] \cdot l}{GJ_p} = \frac{\Delta}{L}, \quad (2)$$

$$\varphi_{DA} = 0, \quad -\frac{M_B l}{GJ_p} + \frac{M \cdot 2l}{GJ_p} - \frac{M_D \cdot 3l}{GJ_p} = 0. \quad (3)$$

Преобразуя (1), (2) и (3), получим

$$\begin{aligned} M_A + M_B + M_D &= M, \\ M_B + M_D &= M - \frac{\Delta GJ_p}{Ll}, \\ M_B + 3M_D &= 2M. \end{aligned}$$

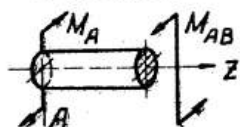
здесь $J_p = \frac{\pi d^4}{32}$, $d = 0,01 \text{ м}$, $M = 25 \text{ Н·м}$,

$$\frac{\Delta GJ_p}{Ll} = \frac{1 \cdot 10^{-3} \cdot 0,8 \cdot 10^{11} \pi \cdot 0,01^4}{0,1 \cdot 0,2 \cdot 32} = 3,93 \text{ Н·м}.$$

$$\left. \begin{aligned} M_A + M_B + M_D &= 25, \\ M_B + M_D &= 21,07, \\ M_B + 3M_D &= 50; \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{aligned} M_A &= 3,93 \text{ Н}\cdot\text{м}, \\ M_B &= 6,60 \text{ Н}\cdot\text{м}, \\ M_D &= 14,47 \text{ Н}\cdot\text{м}. \end{aligned} \right.$$

2. Определение крутящих моментов

Участок АВ



$$M_{AB} = M_A = 3,93 \text{ Н}\cdot\text{м}$$

(направлен против часовой стрелки).

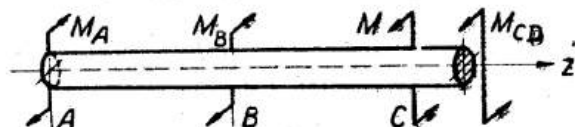
Участок ВС



$$M_{BC} = M_A + M_B = 3,93 + 6,6 = 10,53 \text{ Н}\cdot\text{м}$$

(направлен против часовой стрелки).

Участок CD



$$M_{CD} = M_A + M_B - M = 3,93 + 6,6 - 25 = -14,47 \text{ Н}\cdot\text{м}$$

(направлен по часовой стрелке).

3. Определение углов поворота φ

Начало отсчета выбираем в сечении А.

$$\varphi_A = 0;$$

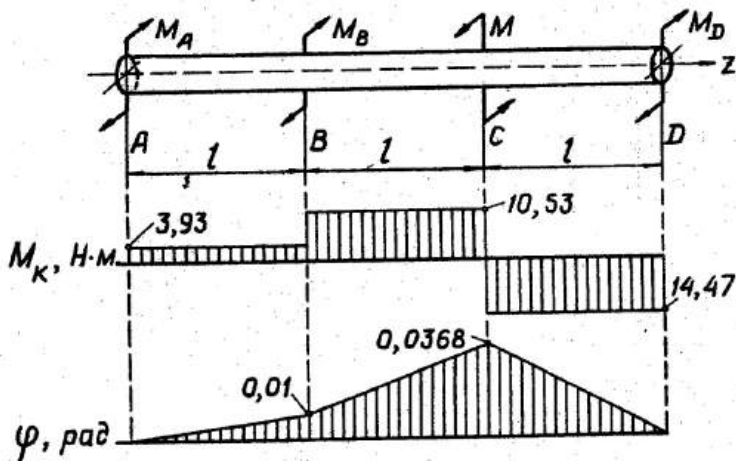
$$\varphi_B = \varphi_{BA} = \frac{M_{AB} l}{GJ_p} = \frac{3,93 \cdot 0,2 \cdot 32}{0,8 \cdot 10^{11} \pi \cdot 0,01^4} = 0,01 \text{ рад};$$

$$\varphi_C = \varphi_B + \varphi_{CB} = \varphi_B + \frac{M_{BC} l}{GJ_p},$$

$$\varphi_c = 0,01 + \frac{10,53 \cdot 0,2 \cdot 32}{0,8 \cdot 10^{11} \pi \cdot 0,01^4} = 0,0368 \text{ рад};$$

$$\varphi_D = \varphi_c + \varphi_{DC} = \varphi_c + \frac{M_{CD} l}{GJ_p},$$

$$\varphi_D = 0,0368 - \frac{14,47 \cdot 0,2 \cdot 32}{0,8 \cdot 10^{11} \pi \cdot 0,01^4} = 0.$$



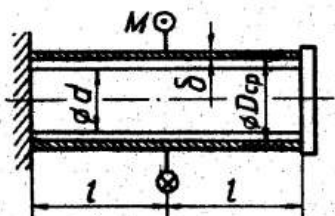
4. Определение коэффициента запаса

$$n_T = \frac{\tau_T}{\tau_{max}}, \quad \tau_{max} = \frac{M_{CD}}{W_p}, \quad W_p = \frac{\pi d^3}{16},$$

$$\tau_{max} = \frac{14,47 \cdot 10^{-6} \cdot 16}{\pi \cdot 0,01^3} = 7,37 \text{ МПа},$$

$$n_T = \frac{\tau_T}{\tau_{max}}$$

Задача 1.3



Трубка и вал, выполненные из одного материала, закреплены левыми торцами, а правыми соединены с жесткой

крышкой. К трубке приложена пара сил M .

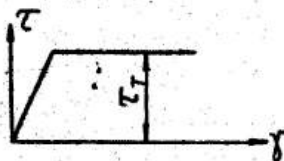
Построить эпюры крутящих моментов M_k , наибольших касательных напряжений $\tau_{\max}$ и углов поворота сечений φ для вала и трубки. Найти предельную величину момента $M_{\text{пред}}$. Материал идеальный упруго-пластичный.

Дано: $M = 600 \text{ Н}\cdot\text{м}$,

$l = 1 \text{ м}$, $D_{\text{ср}} = 40 \text{ мм}$,

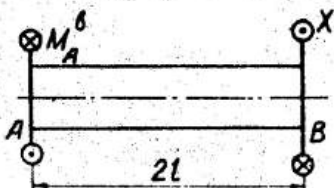
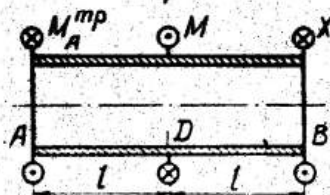
$\delta = \frac{1}{32} D_{\text{ср}}$, $d = \frac{1}{\sqrt{2}} D_{\text{ср}}$,

$\tau_T = 200 \text{ МПа}$, $G = 8 \cdot 10^4 \text{ МПа}$.



Решение

1. Кручение в области упругих деформаций
Рассмотрим отдельно трубку и вал.



а) Уравнение равновесия для трубки

$$M_A^{тр} - M + X = 0. \quad (1)$$

б) Уравнение равновесия для вала

$$M_A^в = X. \quad (2)$$

Задача один раз статически неопределима.

в) Уравнение перемещений

$$\varphi_{ВА}^{тр} = \varphi_{ВА}^в, \quad \frac{Ml}{GJ_K^{тр}} - \frac{X \cdot 2l}{GJ_K^{тр}} = \frac{X \cdot 2l}{GJ_K^в}; \quad (3)$$

$$J_K^{тр} = J_K^{тр} = \frac{\pi D_{ср}^3 \delta}{4} = \frac{\pi D_{ср}^4}{128}, \quad J_K^в = J_K^в = \frac{\pi d^4}{32} = \frac{\pi D_{ср}^4}{128}.$$

Решая уравнения (1), (2), (3), получаем

$$X = \frac{1}{2} M = 150 \text{ Н} \cdot \text{м},$$

$$M_A^{тр} = M - X = 600 - 150 = 450 \text{ Н} \cdot \text{м},$$

$$M_A^в = X = 150 \text{ Н} \cdot \text{м}.$$

г) Построение эпюр

Трубка

Крутящие моменты

$$M_{AD} = M_A^{тр} = 450 \text{ Н} \cdot \text{м},$$

$$M_{BD} = X = 150 \text{ Н} \cdot \text{м}.$$

Наибольшие касательные напряжения

$$\tau_{\max} = \frac{M_K}{W_K}, \quad W_K^{тр} = W_K^{тр} = \frac{\pi D_{ср}^2 \delta}{2} = \frac{\pi D_{ср}^3}{64};$$

$$\tau_{AD} = \frac{M_{AD}}{W_K^{тр}} = \frac{450 \cdot 64}{\pi \cdot 0,04^3} = 143 \cdot 10^6 \frac{\text{Н}}{\text{м}^2} = 143 \text{ МПа}.$$

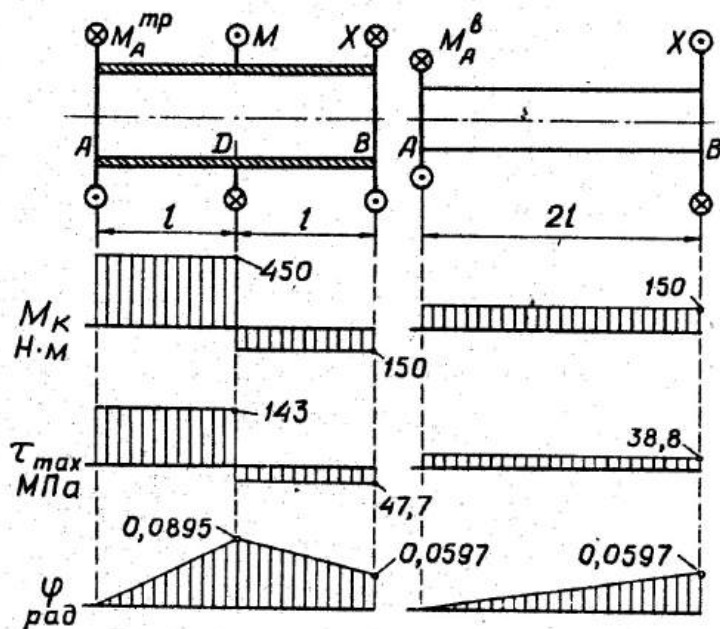
$$\tau_{BD} = \frac{M_{BD}}{W_K^{mp}} = \frac{150 \cdot 64}{\pi \cdot 0,004^3} = 47,7 \cdot 10^6 \frac{\text{Н}}{\text{м}^2} = 47,7 \text{ МПа}.$$

Углы поворота сечений

$$\varphi_A = 0; \quad \varphi_D = \varphi_A + \frac{M_{AD} l}{GJ_K^{mp}} = \frac{450 \cdot 1 \cdot 128}{8 \cdot 10^{10} \pi \cdot 0,04^4} = 0,0895 \text{ рад};$$

$$\varphi_B = \varphi_D + \frac{M_{BD} l}{GJ_K^{mp}} = 0,0895 - \frac{150 \cdot 1 \cdot 128}{8 \cdot 10^{10} \pi \cdot 0,04^4} =$$

$$= 0,0895 - 0,0298 = 0,0597 \text{ рад}.$$



Вал

Крутящий момент

$$M_{AB} = X = 150 \text{ Н·м}.$$

Наибольшее касательное напряжение

$$\tau_{\max} = \frac{M_K}{W_K^{\delta}}, \quad W_K^{\delta} = W_p^{\delta} = \frac{\pi d^3}{16},$$

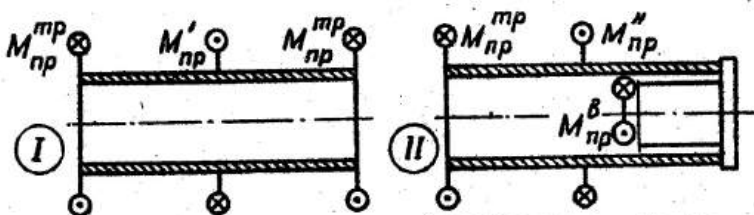
$$\tau_{AB} = \frac{150 \cdot 16}{\pi (0,04\sqrt{2})^3} = 33,8 \cdot 10^6 \frac{\text{Н}}{\text{м}^2} = 33,8 \text{ МПа}.$$

Углы поворота сечений

$$\varphi_A = 0; \quad \varphi_B = \varphi_A + \frac{M_{AB} \cdot 2l}{GJ_K^{\delta}} = \frac{150 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 128}{8 \cdot 10^{10} \pi \cdot 0,04^4} = 0,0597 \text{ рад}.$$

2. Определение предельного момента $M_{пр}$

Рассмотрим два возможных случая потери несущей способности.



$$M_{пр}^{\delta} = \tau_T \cdot \frac{\pi d^3}{12} = 200 \cdot 10^6 \cdot \frac{\pi \cdot 0,04^3}{12 (\sqrt{2})^3} = 1185 \text{ Н·м},$$

$$M_{пр}^{\text{тр}} = \tau_T \cdot \frac{\pi D_{\text{ср}}^2 \delta}{2} = 200 \cdot 10^6 \cdot \frac{\pi \cdot 0,04^2 \cdot 0,02}{16 \cdot 2} = 628 \text{ Н·м}.$$

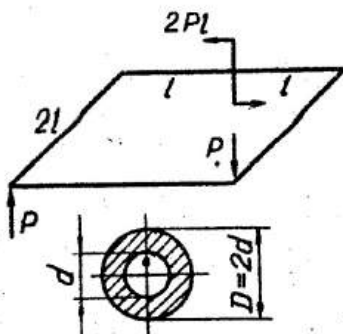
$$\text{I) } M_{пр}' = 2M_{пр}^{\text{тр}} = 2 \cdot 628 = 1256 \text{ Н·м}$$

$$\text{II) } M_{пр}'' = M_{пр}^{\delta} + M_{пр}^{\text{тр}}$$

Реализуем.

2. Статически неопределимые рамы

Задача 2.1



Для заданной пространственной рамы требуется:

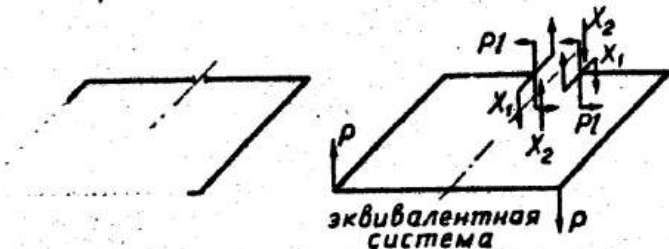
- 1) раскрыть статическую неопределимость,
- 2) построить эпюры изгибающих и крутящих моментов,
- 3) определить коэффициент запаса по текучести, пользуясь теорией Треска - Сен-Венана.

Дано: $P = 1 \text{ кН}$, $l = 0,6 \text{ м}$, $d = 20 \text{ мм}$,

$\sigma_{\text{тр}} = \sigma_{\text{тс}} = 240 \text{ МПа}$, $\mu = 0,25$.

Решение

1. Раскрытие статической неопределимости



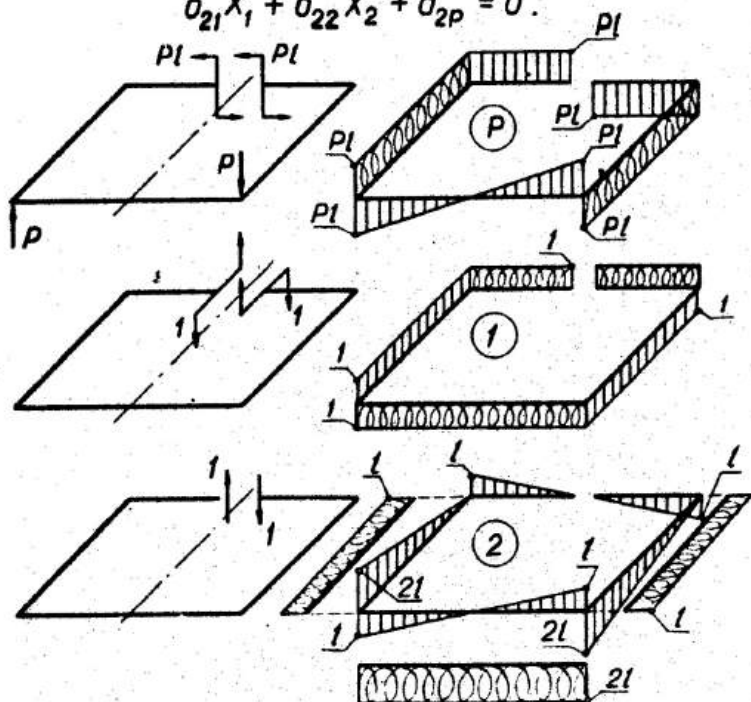
система кососимметрична, поэтому по оси кривой симметрии воз-

наложены только крутящий момент X_1 и поперечная сила X_2 .

Условия эквивалентности

$$\delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \delta_{1p} = 0,$$

$$\delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \delta_{2p} = 0.$$



$$\delta_{11} = \frac{2}{EJ_x} [(2l \cdot l) \cdot l] + \frac{2}{GJ_p} [(2l \cdot l) \cdot l],$$

$$\delta_{12} = \delta_{21} = \frac{2}{EJ_x} [(\frac{1}{2} \cdot 2l \cdot 2l) \cdot l] + \frac{1}{GJ_p} [(2l \cdot 2l) \cdot l],$$

$$\delta_{22} = \frac{2}{EJ_x} [2(\frac{1}{2} \cdot l) \cdot \frac{2}{3} l + (\frac{1}{2} \cdot 2l \cdot 2l) \cdot \frac{4}{3} l] + \frac{1}{GJ_p} [2(2l \cdot l) \cdot l + (2l \cdot 2l) \cdot 2l],$$

$$\delta_{1p} = 0,$$

$$\delta_{2p} = \frac{2}{EJ_x} \left[\left(\frac{1}{2} l \cdot l \right) Pl + \left(\frac{1}{2} l \cdot l \right) \frac{2}{3} Pl \right] + \frac{2}{GJ_p} \left[(2l \cdot l) \cdot Pl \right].$$

Связь между EJ_x и GJ_p : $J_p = 2J_x$,

$$G = \frac{E}{2(1+\mu)} = \frac{E}{2,5}, \quad \frac{1}{GJ_p} = \frac{2,5}{E \cdot 2J_x} = \frac{5}{4} \cdot \frac{1}{EJ_x}.$$

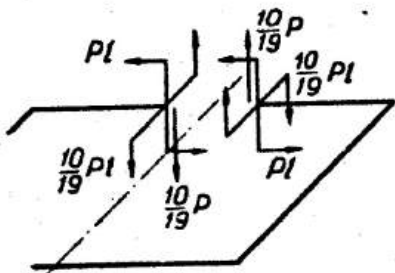
$$\delta_{11} = 9 \frac{l}{EJ_x}, \quad \delta_{12} = \delta_{21} = 9 \frac{l^2}{EJ_x}, \quad \delta_{22} = \frac{65}{3} \frac{l^3}{EJ_x}, \quad \delta_{2p} = \frac{20}{3} \frac{Pl^3}{EJ_x}.$$

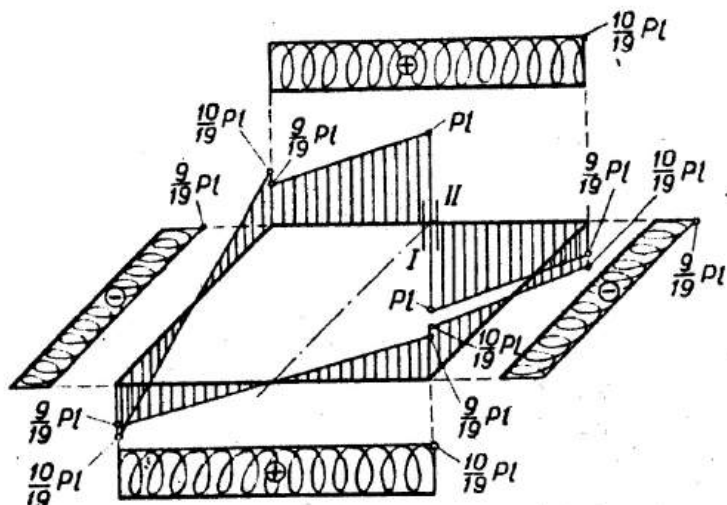
$$\begin{cases} 9 \frac{l}{EJ_x} X_1 + 9 \frac{l^2}{EJ_x} X_2 = 0, \\ 9 \frac{l^2}{EJ_x} X_1 + \frac{65}{3} \frac{l^3}{EJ_x} X_2 + \frac{20}{3} \frac{Pl^3}{EJ_x} = 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} X_1 + l X_2 = 0, \\ 27X_1 + 65l X_2 + 20Pl = 0. \end{cases}$$

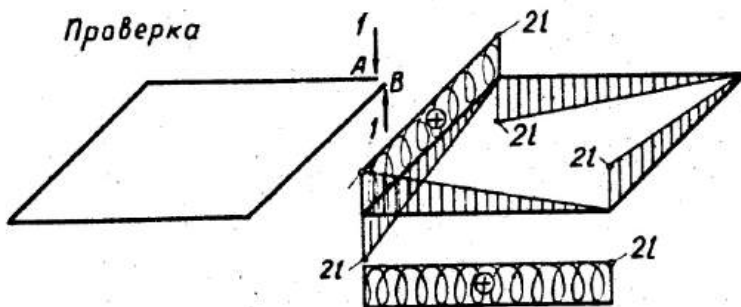
$$\frac{10}{9} Pl, \quad X_2 = -\frac{10}{19} P.$$

иные эпюры изгибающих и
их моментов





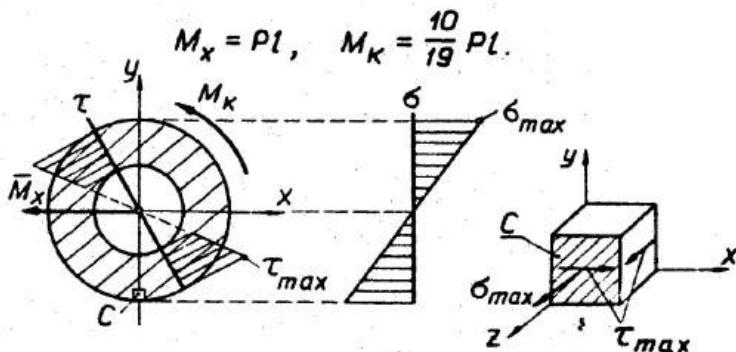
Проверка



$$\delta_{AB} = \frac{1}{EJ_x} \left[2 \left(\frac{1}{2} \cdot 2l \cdot 2l \right) \cdot \left(\frac{1}{3} \cdot \frac{10}{19} Pl \right) - \left(\frac{1}{2} \cdot 2l \cdot 2l \right) \cdot \left(\frac{1}{3} \cdot \frac{9}{19} Pl \right) - \right. \\ \left. - \left(l \cdot \frac{9}{19} Pl \right) \cdot \frac{3}{2} l - \left(\frac{1}{2} l \cdot \frac{10}{19} Pl \right) \cdot \frac{4}{3} l + \left(\frac{1}{2} l \cdot l \right) \cdot \left(\frac{9}{19} Pl + \frac{2}{3} \cdot \frac{10}{19} Pl \right) + \right. \\ \left. + \frac{5}{4} (2l \cdot 2l) \cdot \frac{10}{19} Pl - \frac{5}{4} \cdot 2l \cdot 2l \left(\frac{9}{19} Pl \right) \right] = 0.$$

3. Определение коэффициента запаса по текучести

В опасных сечениях I и II



Напряженное состояние в опасной точке C

$$\sigma_{\max} = \frac{M_x}{W_x}, \quad \tau_{\max} = \frac{M_K}{W_p}, \quad W_p = 2W_x;$$

$$W_x = \frac{J_x}{y_{\max}} = \frac{\frac{\pi D^4}{64} - \frac{\pi d^4}{64}}{\frac{D}{2}} = \frac{\frac{\pi(2d)^4}{64} - \frac{\pi d^4}{64}}{d} = 0,736 d^3.$$

$$\sigma_{\text{экв}} = \sqrt{\sigma_{\max}^2 + 4\tau_{\max}^2} = \frac{\sqrt{M_x^2 + M_K^2}}{W_x},$$

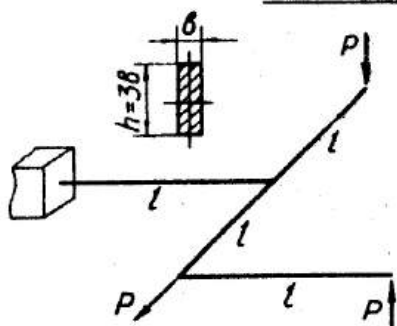
$$= \frac{Pl \sqrt{1 + \left(\frac{10}{19}\right)^2}}{0,736 d^3} = 1,535 \frac{Pl}{d^3}.$$

$$\frac{10^3 \cdot 0,6}{(20 \cdot 10^{-3})^3} = 115 \cdot 10^6 \frac{\text{Н}}{\text{м}^2} = 115 \text{ МПа}.$$

$$n_T = \frac{\sigma_{TP}}{\sigma_{\text{экв}}} = \frac{240}{115} = 2,1.$$

3. Сложное напряженное состояние

Задача 3.1



Для заданной рамы требуется:

1) построить эпюры изгибающих и крутящих моментов;

2) из условия прочности опреде-

лить размер b поперечного сечения;

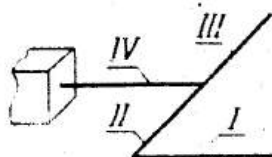
3) для опасного сечения рамы определить диаметр сплошного круглого сечения, равнопрочного заданному.

Дано: $P = 5 \text{ кН}$, $l = 0,5 \text{ м}$, $n_T = 2$,

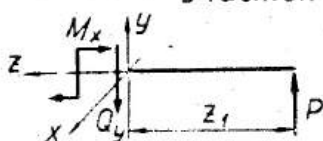
$\sigma_{TP} = 350 \text{ МПа}$, $\sigma_{TC} = 450 \text{ МПа}$.

Решение

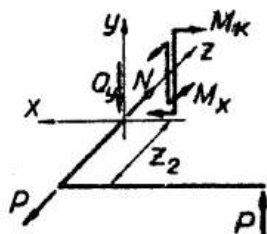
1. Построение эпюр изгибающих M_x , M_y и крутящих M_k моментов



Участок I



$$M_x = Pz_1, \quad z_1 \in [0, l], \quad M_y = 0, \quad M_k = 0$$



участок II

$$M_x = Pz_2, \quad z_2 \in [0, l],$$

$$M_y = 0,$$

$M_K = Pl$ (направлен против часовой стрелки).

участок III

$$M_x = -Pz_3, \quad z_3 \in [0, l],$$

$$M_y = 0,$$

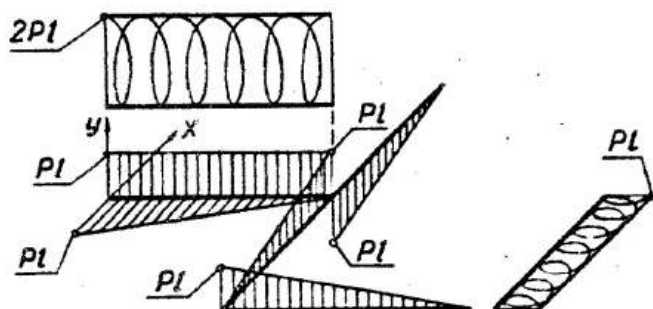
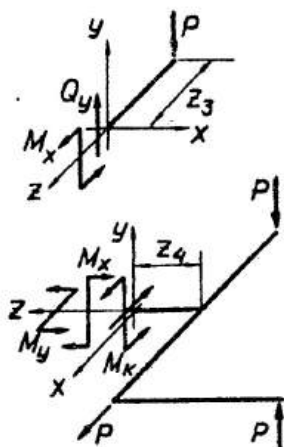
$$M_K = 0.$$

участок IV

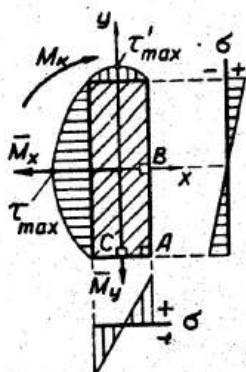
$$M_x = P(l + z_4) - Pz_4 = Pl,$$

$$M_y = Pz_4, \quad z_4 \in [0, l],$$

$M_K = 2Pl$ (направлен по часовой стрелке).



2. Определение размера δ



Опасное сечение расположено у заделки.

В этом сечении

$$M_x = Pl,$$

$$M_y = Pl,$$

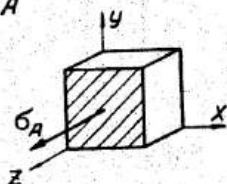
$$M_K = 2Pl.$$

Напряженное состояние в точке A

$$\sigma_A = \frac{M_x}{W_x} + \frac{M_y}{W_y},$$

$$W_x = \frac{b(3b)^2}{6}, \quad W_y = \frac{3b \cdot b^2}{6};$$

$$\sigma_A = \frac{Pl \cdot b}{b(3b)^2} + \frac{Pl \cdot b}{3b \cdot b^2} = \frac{8Pl}{3b^3}.$$

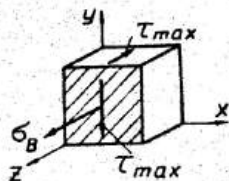


Напряженное состояние в точке B

$$\sigma_B = \frac{M_y}{W_y} = \frac{Pl \cdot b}{3b \cdot b^2} = 2 \frac{Pl}{b^3};$$

$$\tau_{max} = \frac{M_K}{W_K}, \quad W_K = \alpha 3b \cdot b^2, \quad \alpha = 0,267 \text{ при } \frac{h}{b} = 3;$$

$$\tau_{max} = \frac{2Pl}{0,267 \cdot 3b^3} = 2,5 \frac{Pl}{b^3}.$$



По гипотезе Мора

$$\sigma_{эквВ} = \frac{1-\nu}{2} \sigma_B + \frac{1+\nu}{2} \sqrt{\sigma_B^2 + 4\tau_{max}^2},$$

$$\nu = \frac{\sigma_{ТР}}{\sigma_{ТС}} = \frac{350}{450} = 0,778,$$

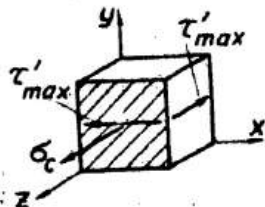
$$\sigma_{эквВ} = \left(\frac{1-0,778}{2} \cdot 2 + \frac{1+0,778}{2} \sqrt{2^2 + 4 \cdot 2,5^2} \right) \frac{Pl}{\delta^3} = 5,01 \frac{Pl}{\delta^3}.$$

Напряженное состояние
в точке С

$$\sigma_C = \frac{M_x}{W_x} = \frac{Pl \cdot 6}{\delta (3\delta)^2} = 0,667 \frac{Pl}{\delta^3};$$

$$\tau'_{max} = \eta \tau_{max}, \quad \eta = 0,753 \text{ при } \frac{h}{\delta} = 3,$$

$$\tau'_{max} = 0,753 \cdot 2,5 \frac{Pl}{\delta^3} = 1,883 \frac{Pl}{\delta^3}.$$



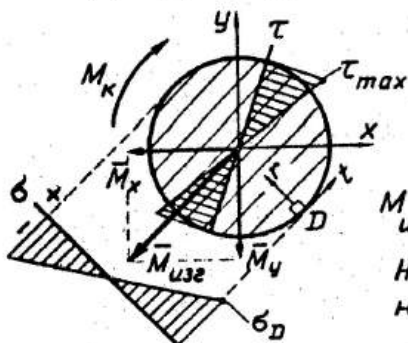
Так как $\sigma_C < \sigma_B$ и $\tau'_{max} < \tau_{max}$, то $\sigma_{эквС} < \sigma_{эквВ}$. Учитывая, что $\sigma_{эквВ} > \sigma_{эквА}$, расчет проводим, исходя из условия прочности для опасной точки В

$$\sigma_{эквВ} \leq \frac{\sigma_{ТР}}{n_T}, \quad 5,01 \frac{Pl}{\delta^3} = \frac{\sigma_{ТР}}{n_T}.$$

$$\delta = \sqrt[3]{\frac{5,01 \cdot 10^3 \cdot 0,5 \cdot 2}{350 \cdot 10^6}} = 2,43 \cdot 10^{-2} \text{ м};$$

принимаем $\delta = 25 \text{ мм}.$

3. Определение диаметра круглого сечения, равнопрочного заданному



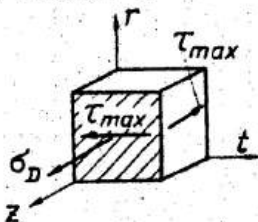
$$M_x = Pl,$$

$$M_y = Pl,$$

$$M_k = 2Pl.$$

$$M_{изг} = \sqrt{M_x^2 + M_y^2} = Pl\sqrt{2}.$$

Напряженное состояние в точке D



$$\sigma_D = \frac{M_{изг}}{W_{изг}}, \quad W_{изг} = \frac{\pi d^3}{32};$$

$$\sigma_D = \frac{Pl\sqrt{2} \cdot 32}{\pi d^3}.$$

$$\tau_{max} = \frac{M_k}{W_p}, \quad W_p = \frac{\pi d^3}{16}, \quad \tau_{max} = \frac{2Pl \cdot 16}{\pi d^3} = \frac{32Pl}{\pi d^3}.$$

$$\sigma_{экв} = \frac{1-\nu}{2} \sigma + \frac{1+\nu}{2} \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2},$$

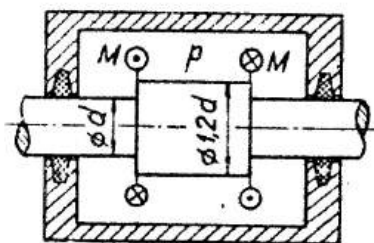
$$\sigma_{эквD} = \left(\frac{1-0,778}{2} \sqrt{2} + \frac{1+0,778}{2} \sqrt{(\sqrt{2})^2 + 4 \cdot 1^2} \right) \frac{32Pl}{\pi d^3} = 23,8 \frac{Pl}{d^3}.$$

Из условия $\sigma_{эквD} = \sigma_{эквB}$ определяем d:

$$23,8 \frac{Pl}{d^3} = 5,01 \frac{Pl}{b^3}, \quad d = b \sqrt[3]{\frac{23,8}{5,01}} = 1,68 b;$$

$$d = 1,68 \cdot 2,43 \cdot 10^{-2} = 4,08 \cdot 10^{-2} \text{ м} \approx 41 \text{ мм}.$$

Задача 3.2

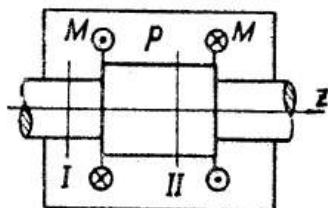


Брус, помещенный в герметичную камеру, нагружен парами сил M и давлением p .

Определить коэффициент запаса по текучести.

Дано: $M = 30 \text{ Н}\cdot\text{м}$, $p = 150 \text{ МПа}$, $d = 10 \text{ мм}$,
 $\sigma_{\text{ТР}} = 300 \text{ МПа}$, $\sigma_{\text{ТС}} = 400 \text{ МПа}$.

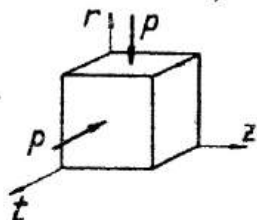
Решение



Сечение I
 Все точки
 этого сечения
 равноопасны.
 Все площадки - главные.



Напряженное состояние в точке A



Главные напряжения

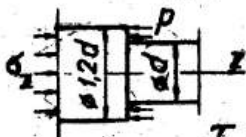
$$\sigma_1 = 0, \quad \sigma_2 = \sigma_3 = -p.$$

Эквивалентное напряжение
 по теории Мора

$$\sigma_{\text{экв}} = \sigma_1 - \nu \sigma_3, \quad \nu = \frac{\sigma_{\text{ТР}}}{\sigma_{\text{ТС}}};$$

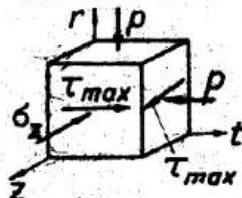
$$\sigma_{\text{экв д}} = 0 - \frac{300}{400} (-150) = 112,5 \text{ МПа}.$$

Сечение II



Наиболее нагружены периферийные точки сечения.

Напряженное состояние в точке В



$$\tau_{\max} = \frac{M_K}{W_p}$$

$$W_p = \frac{\pi (1,2d)^3}{16}$$

$$\tau_{\max} = \frac{30 \cdot 16}{\pi (1,2 \cdot 10^{-2})^3} = 88,4 \cdot 10^6 \text{ Па} = 88,4 \text{ МПа}.$$

$$\Sigma R_z = 0, \quad p \frac{\pi}{4} [(1,2d)^2 - d^2] = \sigma_z \frac{\pi (1,2d)^2}{4}$$

$$\sigma_z = p \left[1 - \left(\frac{d}{1,2d} \right)^2 \right] = 0,306 p = 0,306 \cdot 150 = 45,8 \text{ МПа}.$$

В исходном напряженном состоянии одно главное напряжение известно ($\sigma_{2л} = -150 \text{ МПа}$), два других главных напряжения находим по формуле

$$\sigma_{2л} = \frac{\sigma_t + \sigma_z}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_t - \sigma_z}{2} \right)^2 + \tau_{zt}^2}$$

$$\sigma_{2л} = \frac{-150 - 45,8}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{-150 + 45,8}{2} \right)^2 + 88,3^2} = -97,9 \pm 103.$$

Учитывая, что $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$, получаем

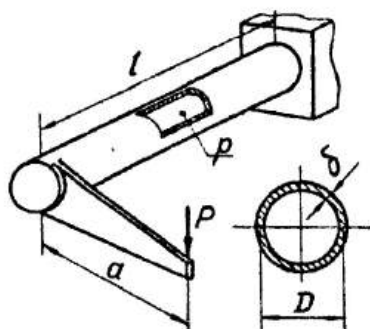
$$\sigma_1 = 5,1 \text{ МПа}; \quad \sigma_2 = -150 \text{ МПа}, \quad \sigma_3 = -201 \text{ МПа}.$$

$$\sigma_{экв} = \sigma_1 - \nu \sigma_3 = 5,1 - 0,75 (-201) = 156 \text{ МПа}.$$

Так как $\sigma_{эквВ} > \sigma_{эквА}$, то коэффициент запаса

$$n_T = \frac{\sigma_{ТР}}{\sigma_{эквВ}} = \frac{300}{156} = 1,9.$$

Задача 3.3



Трубка нагружена силой P и внутренним давлением p , как показано на рисунке.

Требуется:

- 1) определить наибольшее эквивалент-

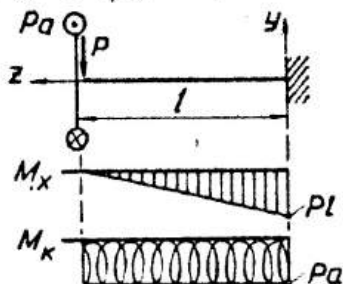
ное напряжение по теории Хубера-Мизеса,
2) для наиболее напряженной точки построить круговую диаграмму напряжений.

Дана: $P = 7 \text{ кН}$, $p = 10 \text{ МПа}$, $l = 1,5 \text{ м}$,

$a = 1 \text{ м}$, $D = 20\delta = 100 \text{ мм}$, $\sigma_{\text{тр}} = \sigma_{\text{тс}}$.

Решение

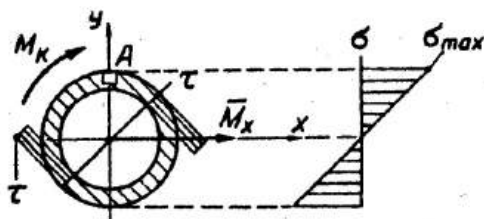
Под действием силы P в поперечном сечении трубки возникают изгибающий момент M_x и крутящий момент M_k .



Для опасного сечения, расположенного у заделки,

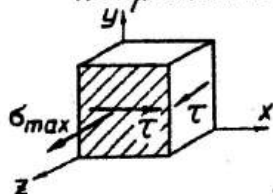
$$M_x = Pl = 10,5 \text{ кН} \cdot \text{м},$$

$$M_k = Pa = 7 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$



Точка А -
опасная точка
(зона растяже-
ния).

Напряженное состояние в точке А



$$\sigma_{\max} = \frac{M_x}{W_x}, \quad W_x = \frac{\pi D^2 \delta}{4},$$

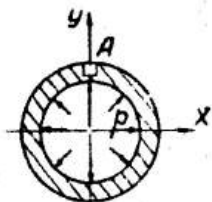
$$\sigma_{\max} = \frac{10,5 \cdot 10^3 \cdot 4 \cdot 20}{\pi (0,1)^3} = 267 \cdot 10^6 \text{ Па};$$

$$\tau = \frac{M_x}{W_p}, \quad W_p = \frac{\pi D^2 \delta}{2}, \quad \tau = \frac{7 \cdot 10^3 \cdot 2 \cdot 20}{\pi (0,1)^3} = 89,1 \cdot 10^6 \text{ Па};$$

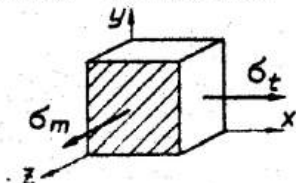
$$\sigma_{\max} = 267 \text{ МПа}, \quad \tau = 89,1 \text{ МПа}.$$

При действии внутреннего давления p в трубке возникают меридиональные σ_m и окружные σ_t напряжения. Все точки сечения равноопасны.

Напряженное состояние
в точке А

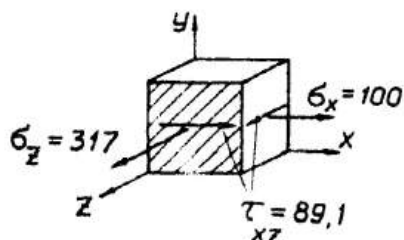


$$\sigma_m = \frac{pD}{4\delta},$$



$$\sigma_m = \frac{10 \cdot 20}{4} = 50 \text{ МПа}, \quad \sigma_t = \frac{pD}{2\delta} = \frac{10 \cdot 20}{2} = 100 \text{ МПа}.$$

Суммарное напряженное состояние в точке А



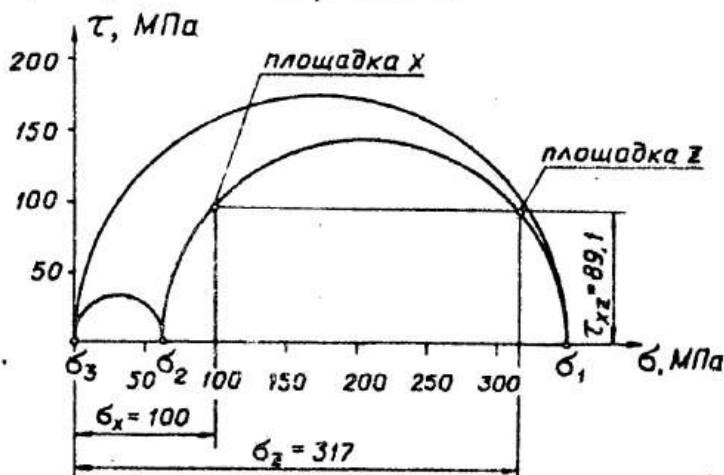
$$\begin{aligned}\sigma_z &= \sigma_{\max} + \sigma_m = \\ &= 267 + 50 = 317 \text{ МПа}, \\ \sigma_x &= \sigma_t = 100 \text{ МПа}.\end{aligned}$$

Эквивалентное напряжение в точке А

$$\sigma_{\text{экв}} = \sqrt{J_1^2 + 3J_2}, \quad J_1 = \sigma_x + \sigma_z, \quad J_2 = -\sigma_x \sigma_z + \tau_{xz}^2;$$

$$\begin{aligned}\sigma_{\text{экв}} &= \sqrt{(\sigma_x + \sigma_z)^2 + 3(-\sigma_x \sigma_z + \tau_{xz}^2)} = \\ &= \sqrt{(100 + 317)^2 + 3(-100 \cdot 317 + 89,1^2)} = 320 \text{ МПа}.\end{aligned}$$

Диаграмма напряжений



Редактор Ю.Н.Хлебзинский

Корректор В.М.Цирев

Заказ 1345 Объем 2 п.л. (1,9 уч.-изд.л.). Тираж 200 экз.
Бесплатно. Подписано к печати 07.10.81г. Плен 1981 г., № 74

Типография МВТУ. 107005, Москва, Б-5, 2-я Бауманская, 5.