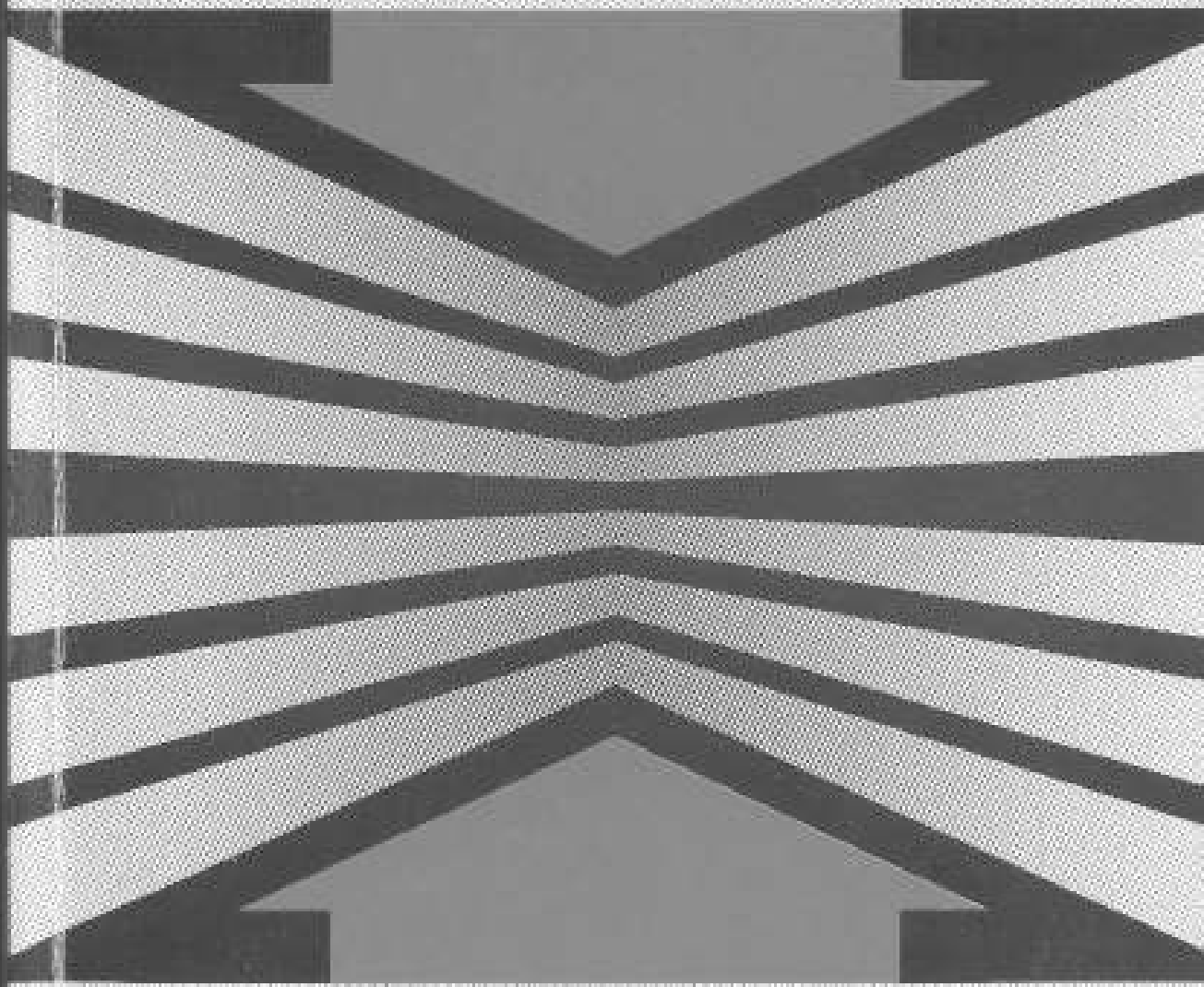
# Экспериментальная механика



Издательство МГТУ
имени Н.Э. Баумана

*К 175-летию МГТУ им. Н.Э. Баумана*

# Экспериментальная механика

Под редакцией
д-ра техн. наук, проф. **Р.К. Вафина**,
д-ра техн. наук, проф. **О.С. Нарайкина**

Москва
Издательство МГТУ имени Н.Э. Баумана
2004

УДК 539.3
ББК 30.121
Э413

**Э413** **Экспериментальная** механика / Б.В. Букеткин, А.А. Горбатовский, И.Д. Кисенко и др.; Под ред. Р.К. Вафина, О.С. Нарайкина. — М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2004. — 136 с.: ил.

ISBN 5-7038-2458-3

Рассмотрены основные методы испытаний с целью определения механических характеристик материалов. Приведены описания экспериментальных работ, осуществляемых для подтверждения допущений, лежащих в основе теорий изгиба, кручения, сложного сопротивления, устойчивости стержней.

В основу книги положены материалы лекций, читаемых авторами студентам МГТУ им. Н.Э. Баумана.

Для преподавателей, специалистов в области прочности материалов и конструкций и студентов, изучающих курс «Сопротивление материалов».

**УДК 539.3**
**ББК 30.121**

© Коллектив авторов, 2004
© Издательство МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2004

ISBN 5-7038-2458-3

## Предисловие

Экспериментальная механика — это раздел механики деформируемого твердого тела, в котором изучаются методы экспериментального исследования напряжений, деформаций, перемещений с целью оценки прочности и деформируемости различных материалов, элементов машин и сооружений, натурных конструкций и их моделей.

Термин «экспериментальная механика» был введен русским ученым-механиком В.Л. Кирпичевым. В 1895 г. на II съезде деятелей российского технического и профессионального образования он выступил с докладом «Экспериментальная механика и механические лаборатории высших технических учебных заведений», в котором, говоря о роли эксперимента в механике, отметил: «Наука должна возможно часто обращаться к проверке экспериментальных данных, служащих ее основанием; в этом возвращении к земле она будет черпать новые силы для дальнейшего развития».

Несмотря на огромные изменения в механике за прошедшие сто с лишним лет, этот тезис и ныне сохраняет свою актуальность.

В то же время с появлением мощного оборудования и развитием численных методов стало возможным создание и использование чрезвычайно сложных (с недостижимыми ранее степенью детализации и точностью) математических моделей механических систем и процессов, отражающих свойства реальных объектов природы и техники. Эффективность применения таких моделей в решающей степени зависит от достоверности исходных данных о механических характеристиках материалов и конструктивных элементов систем и воздействиях, которым эти системы подвергаются. Единственный источник таких данных — эксперимент. Важно отметить, что современная механика имеет дело не только с хорошо известными, например металлическими материалами, но и с нетрадиционными — с чрезвычайно сложной структурой и весьма необычными свойствами (композитные материалы, различные биологические ткани и т. п.). То же можно сказать и о воздействиях на систему в реальных условиях эксплуатации. Это предъявляет высокие требования к методам и технике экспери-

мента и к необходимой точности результатов экспериментальных исследований. В то же время эксперимент остается, по существу, единственным реальным методом проверки адекватности сложных математических моделей современной механики. В этом качестве значимость экспериментальных исследований только возрастает с течением времени.

Целью данной работы является изложение основ экспериментальной механики. Авторы сознательно сосредоточили свое внимание прежде всего на физическом содержании экспериментов и не загромождали изложение описанием сложных современных технических средств экспериментальных исследований и используемой техники. При этом, чтобы суть эксперимента была более доступна для понимания, в первую очередь, студентами, испытания образцов из разных материалов на растяжение, сжатие, кручение авторы описывают подробно.

Такой подход представляется обоснованным в силу того, что книга в основном адресована студентам технических вузов. Кроме того, описанию современной испытательной техники посвящена обширная литература, при работе с которой человек, вооруженный пониманием физического смысла эксперимента, не встретит непреодолимых препятствий.

Авторы благодарны Р.Н. Бадикову, А.Н. Королевой, Д.А. Шевчук и А.А. Шипуновой за помощь при подготовке рукописи к печати. Редактору издательства МГТУ им. Н.Э. Баумана Михалевой Ларисе Александровне, приложившей немало усилий для выпуска книги в свет, авторы выражают благодарность.

# Глава 1
# Механические испытания материалов

## 1.1. Краткие исторические сведения

В становлении и развитии науки о прочности материалов чрезвычайно важное место занимают экспериментальные исследования, целью которых является [1]:

1) изучение разрушения материала под действием приложенных к нему сил и влияния различных внешних факторов на характер разрушения;

2) определение характеристик материала путем проведения специальных испытаний, необходимых для построения теорий расчетов на прочность;

3) сопоставление выполненных расчетов на прочность с экспериментальными данными.

Экспериментальные исследования прочности материалов начались в эпоху Возрождения с опытов Леонардо да Винчи (1452–1519) [2]. Он проводил испытания на растяжение металлических проволок, струн, волокон, изучал изгиб различных стержней. Результаты этих испытаний не всегда сопровождались правильными выводами и нередко содержали ошибки и противоречия. Тем не менее они непосредственно указывают на то, что впервые осознанно проводилось исследование прочности материалов.

Следующий значительный шаг в экспериментальном изучении прочности материалов был сделан (после Леонардо да Винчи) еще одним выдающимся представителем эпохи Возрождения Галилео Галилеем (1564–1642). На основе большого количества проведенных опытов им было установлено, что под действием продольной силы сопротивление стержня пропорционально площади поперечного сечения. Галилей экспериментальными исследованиями и выводами создал предпосылки для построения первой теории прочности.

Кроме того, он впервые обосновал необходимость создания науки о сопротивлении материалов на основе опытных данных.

Позднее исследованием прочности строительных материалов занимался французский ученый Эдме Мариотт (1620–1684). Он проводил систематические эксперименты по растяжению и изгибу различных твердых тел, проверяя результаты, полученные Галилеем. Изучая прочность деревянных и стеклянных балок, Мариотт убедился в справедливости основных выводов Галилея. Опытами Мариотта заканчивается первый этап экспериментального изучения механических свойств материалов. Результаты научных поисков этого периода принесли огромную пользу и не утратили своего значения до настоящего времени.

Для решения технических задач того времени требовалось изучение свойств материалов, из которых изготовлялись детали машин и сооружений, находящихся под действием внешних сил. Руководствуясь этим, английский ученый Роберт Гук (1635–1703) в 1676 г. опытным путем установил, что при растяжении стального стержня изменение его длины прямо пропорционально приложенной к нему нагрузке. Эта линейная зависимость, названная впоследствии законом Гука, была положена в основу учения о сопротивлении материалов.

То, что материалы по-разному сопротивляются воздействию внешних сил, отмечали еще Л. да Винчи и Г. Галилей. Знали об этом Э. Мариотт, Р. Гук и другие исследователи, занимавшиеся испытаниями материалов на прочность, поскольку это было достаточно очевидным. Однако потребовалось более века после открытия Гуком закона упругости, чтобы установить, что для каждого материала существует постоянная величина, характеризующая его способность сопротивляться воздействию внешних сил. Это было сделано английским ученым Томасом Юнгом (1773–1829) [2]. С тех пор ни один инженерный расчет на прочность и жесткость элемента конструкции или сооружения не обходится без определения этой величины, названной модулем упругости. В многочисленных опытах Юнг показал, что модуль упругости характеризует важнейшее свойство материала — его жесткость.





Несколько ранее Т. Юнга экспериментальными исследованиями в области прочности материалов занимались французский ученый Шарль Кулон (1736–1806) и русский ученый Михаил Васильевич Ломоносов (1711–1765) [2]. Изучив разрушение при сжатии материалов, Кулон пришел к выводу, что главной причиной разрушения является сдвиг. Тем самым он подготовил основу для возникновения нового взгляда на прочность, названного впоследствии теорией наибольших касательных напряжений.

М.В. Ломоносов — первый русский ученый, разработавший научные основы экспериментального изучения механических свойств материалов. В 1752 г. им были созданы приборы для исследования твердости камней, а также машины для испытания прочности цепей. Определяя понятие твердости, Ломоносов связал ее с внутренними силами сцепления частиц материала. Великий русский ученый глубоко оценил значение эксперимента для прогресса научных знаний.

Развитие машиностроения и железнодорожного транспорта в XIX в. привело к значительному расширению экспериментальных исследований — проводились многочисленные испытания различных материалов, деталей и конструкций. В начале XIX в. были созданы первые достаточно мощные испытательные установки, основанные на принципе рычага. Они позволяли доводить до разрушения не образцы материалов, а конструкции колонн и балок в натуральную величину. Особенность экспериментальной науки XIX в. заключалась в проведении большого количества опытов, в результате которых получали справочные данные о прочностных свойствах конструкционных материалов, производимых промышленными фирмами. Известный французский специалист по мостостроению Э. Готэ создал рычажную машину для испытания каменных кубиков. Результаты опытов Готэ включил в виде таблиц в свое руководство по мостам. В то время уже стало правилом перед началом любого строительства проводить испытание материалов.

В России первая машина для испытания металлов была создана уже в 1825 г., а спустя 12 лет Н.Ф. Ястржембский издал первый курс «Сопротивление материалов», в основу которого были положены

многочисленные экспериментальные данные. Примерно в это же время была введена и экспериментально изучена весьма важная константа материала — коэффициент поперечной деформации, или коэффициент Пуассона, названный так в честь французского физика Симеона Дени Пуассона (1781–1840), впервые получившего эту упругую константу. Теперь существует таблица значений коэффициента Пуассона для различных материалов и без его учета не обходится ни один серьезный инженерный расчет.

В конце XIX в. начинают развиваться методические основы механических испытаний материалов. Серьезные заслуги в этой области принадлежат немецкому ученому-механику Иоганну Баушингеру (1834–1893) [2]. Под его руководством была построена самая мощная испытательная машина горизонтального типа, способная развивать силу до 1 МН. В дальнейшем были созданы горизонтальные машины, развивающие силу выше 10 МН. Баушингер поставил опыты и впервые начал точно измерять деформации образцов в процессе испытания. Для этого он изобрел, изготовил и применил новый прибор — тензометр. Чувствительность прибора оказалась очень высокой, она удовлетворяет даже современным требованиям. Этот ученый начал строить диаграммы растяжения материалов, нанося на бумаге точки, соответствующие силе и вызванной ею деформации, ставшие впоследствии паспортом прочности материала. С его именем связан важнейший эффект, заключающийся в том, что предварительная пластическая деформация одного знака уменьшает сопротивляемость материала в отношении последующей пластической деформации обратного знака (эффект Баушингера).

В конце XIX в. инженеры-исследователи осознали необходимость создания единых для всех стран условий и методов оценки механических свойств материалов. По инициативе и под непосредственным руководством Баушингера в 1884 и 1886 гг. в Мюнхене проходят две международные конференции, посвященные этому вопросу. В 1889 г. в связи с предстоящей международной выставкой в Париже был созван конгресс по прикладной механике. На заключительном заседании этого конгресса было принято решение о создании Международного об-





щества по испытанию материалов. В числе активных организаторов этого общества был известный русский инженер Н.А. Белелюбский (1845–1922), впоследствии ставший его вице-президентом. Н.А. Белелюбский основал к тому же первую русскую научную школу в области экспериментального изучения вопросов прочности материалов. Ему же принадлежит создание первой в России лаборатории, предназначенной для изучения механических свойств материалов. В это время активно разрабатываются и внедряются различные методы исследования материалов, например оптический метод исследования напряжений Максвелла, метод ударной вязкости французского исследователя Шарпи и многие другие.

В дальнейшем методы и средства проведения испытаний материалов постоянно совершенствовались, и к настоящему времени они представляют собой весьма обширную область знаний. Поэтому давно назрела необходимость в обобщении различных методов испытаний материалов, их классификации, в обосновании практических рекомендаций для широкого круга инженерно-технических и научных работников. Ввиду большого разнообразия современных методов испытаний материалов их классификация строится по различным признакам. Иногда те или иные методы испытаний материалов группируются по признаку решения конкретных задач, например задач, связанных с расчетом и конструированием (первая группа задач) или с технологией и производством (вторая группа). Для первой группы задач необходимо проведение исследований и определение характерных параметров, для второй — контроль качества, диагностика состояния машин, анализ аварийных случаев.

Чаще используют классификацию методов испытаний материалов по признаку того или иного способа воздействия на исследуемый материал.

1. Механические и технологические испытания прочности, деформируемости, пластичности, вязкости и характера разрушения. К этой группе можно отнести определение свойств поверхности, например твердости и сопротивления изнашиванию.

2. Физические испытания, применяемые для количественного определения механических (модуль упругости), термических (энергия активации), оптических (оптическая постоянная), электрических и других свойств материала.

3. Исследования тонкого строения и структуры материала и их изменения (например, металлографический метод).

4. Контроль, основанный на взаимодействии различных форм энергии с материалом. Эти методы применяют преимущественно для проверки заготовок и деталей машин и часто используют для непрерывного контроля параметров качества.

5. Определение деформаций и напряжений в деталях машин (например, тензометрия).

## 1.2. Классификация методов механических испытаний

В настоящее время применение методов механических испытаний и соответствующего испытательного оборудования связано с исследованием закономерностей деформирования и разрушения материалов и элементов конструкций в различных условиях, а именно в зависимости от вида напряженного состояния (одноосное, двухосное и трехосное); статического, динамического и циклического нагружения; низких, нормальных и высоких температур и т. д. Задачами таких исследований могут быть проверка справедливости гипотез и теорий механики деформируемого твердого тела, получение данных о механическом изменении материалов при внешнем нагружении, определение их механических характеристик и оценка несущей способности элементов конструкций или конструкции в целом.

Механические испытания классифицируются [3] следующим образом.

1. По целевому признаку:

– проверка справедливости гипотез, теорий и определяющих уравнений механики деформируемого твердого тела в различных условиях;





– определение механических характеристик материалов;

– исследование напряженно-деформированного состояния конструкций;

– контроль поврежденности материала в конструкции и оценка остаточной долговечности элементов конструкции.

2. По виду напряженного состояния:

– исследование закономерностей деформирования и разрушения материалов и элементов конструкций при одноосном напряженном состоянии (растяжение, сжатие, изгиб);

– исследование закономерностей деформирования и разрушения материалов и элементов конструкций при двухосном напряженном состоянии;

– исследование закономерностей деформирования и разрушения материалов и элементов конструкций при трехосном напряженном состоянии;

3. По характеру воздействия внешних сил:

– исследование при статическом нагружении (скорость деформаций мала);

– исследование при динамическом нагружении (скорость деформаций велика и реализуется при ударе);

– исследование при циклическом нагружении (частоты нагружения от $3 \cdot 10^{-4}$ Гц до 100 кГц). Здесь различают методы исследования малоцикловой, многоцикловой и высокочастотной усталости.

4. По температуре испытаний:

– высокотемпературные испытания при 323…3500 K;

– низкотемпературные испытания при 1,5…273 K;

– испытания в климатическом диапазоне 273…323 K.

5. По природе нагрузок, воздействующих на объект испытаний:

– при силовом воздействии (сосредоточенные и распределенные нагрузки, силы инерции и тяжести);

– при воздействии на объект тепловых потоков и неоднородных температурных полей (термостойкость, термоусталость);

– при действии мощных магнитных и электрических полей.

Объекты исследования при механических испытаниях — образцы, модели, элементы конструкций и конструкции в натуральную величину. Наиболее широко используются образцы. Образ-

цом называется тело специальной формы, подвергающееся испытанию для оценки механических свойств материала. В настоящее время испытывают разнообразные образцы, которые отличаются друг от друга формой, размерами, назначением. Некоторые типы образцов регламентируются нормативами. К ним относятся образцы для испытаний на одноосное растяжение и сжатие, на кручение и изгиб, образцы для усталостных испытаний и др. Многие типы образцов, особенно используемые в научно-исследовательской работе, не регламентируются нормативными документами, например образцы для испытаний в сложном напряженном состоянии.

Для получения сопоставимых и воспроизводимых результатов механических испытаний образцы должны отвечать соответствующим требованиям [4]. Заготовки образцов должны быть отобраны из прутков, листов или отливок одной и той же плавки или партии. Прежде всего изучается химический состав металла или сплава, т. е. устанавливается количественное содержание химических элементов в исследуемом материале. Механические свойства металлов и сплавов очень сильно зависят от их структурного состояния. Металлы и сплавы представляют собой поликристаллические вещества, поэтому необходимо провести микроструктурный анализ. Структурное состояние металлов зависит от режима термообработки, технологии литья или прокатки. Без знания химического состава и структурных характеристик металла невозможно достаточно надежно оценить его механические свойства. Всякий образец содержит рабочую часть, в которой реализуются однородные напряженное и деформированное состояния. Необходимость реализации однородного напряженно-деформированного состояния в рабочей части образца связана с тем, что не существует метода прямой оценки напряжений в точках деформированного тела [4]. Существующие методы исследования напряженно-деформированного состояния тел позволяют измерять деформацию на внешней поверхности исследуемого тела. Величину напряжений в точках тела оценивают по внешним силам, но это возможно только при соблюдении определенных условий.

Условия проведения эксперимента реализуются путем выбора формы образца, приложением к нему таких внешних сил, при которых с достаточной степенью достоверности можно считать, что напряженное и деформированное состояния во всех точках исследуемого образца одинаковы, т. е. в нем создано однородное напряженно-деформированное состояние. Обеспечив такие условия эксперимента, по измерениям взаимных перемещений точек на поверхности образца можно судить о деформациях во внутренних точках. По измеренным внешним силам можно рассчитать напряжения во внутренних точках исследуемого образца, приняв гипотезы однородности, сплошности и изотропности. На рабочей части образца выделяется расчетный участок, который используется для измерения соответствующих параметров (удлинений, укорочений, углов закручивания и поворота, изменений поперечных размеров и др.)

Чаще всего образец представляет собой стержень круглого, кольцевого или прямоугольного поперечного сечения. Форма рабочей части образца зависит от вида заготовки. Если в качестве заготовки используется пруток, отливка или лист большой толщины, то рабочая часть образца имеет цилиндрическую форму; если заготовка — относительно тонкий лист, то рабочая часть образца имеет призматическую форму. Процесс получения заготовки образца регламентируется нормативными документами. Предпочтительным является образец цилиндрической формы.

Образец получают механической обработкой (точением, фрезерованием, шлифованием, полированием). При этом нужно исключить изменение механических свойств материала образца относительно механических свойств исходных заготовок. В некоторых случаях в качестве образцов используются полуфабрикаты (проволока, лента, нити, канаты, арматура и т. п.).

К геометрической форме образца предъявляются требования, которые регламентируются нормативными документами и инструкциями. Совершенство геометрической формы образца позволяет правильно оценить результаты испытаний и воспроизвести эти результаты в последующих опытах [4]. Недопустимы изменения поперечных размеров рабочей части образца, искривление его оси и другие геометрические несовершенства формы, приводящие к неоднородности напряженно-деформированного состояния выше предельных значений, предусмотренных инструкциями.

Значительное влияние на результаты механических испытаний образцов оказывает состояние поверхности рабочей части образца. Наличие царапин, вмятин, острых надрезов, раковин может привести к местному изменению напряжено-деформированного состояния, что, в свою очередь, приведет к преждевременному разрушению материала и исказит результаты опыта. Шероховатость внешней поверхности рабочей части образца для статических испытаний должна соответствовать шероховатости, получаемой тонким точением или шлифованием. У образцов, предназначенных для усталостных испытаний, шероховатость поверхности должна быть ниже и достигаться тонким шлифованием и полированием.

Образец для механических испытаний должен быть однородным по химическому составу и микроструктуре. На рабочей части образца не должно быть раковин, волосовин, трещин, инородных включений и других дефектов структуры, влияющих на распределение внутренних сил, т. е. приводящих к неоднородности напряжено-деформированного состояния. Структурное состояние образца желательно оценивать методами неразрушающего контроля. Образцы, содержащие заметные дефекты структуры, должны быть отбракованы [4].

На структурное состояние металлов и их сплавов важнейшее влияние оказывает термообработка, поэтому она должна строго соответствовать заданной [4]. На структурное состояние, по крайней мере, поверхностных слоев образца значительное влияние оказывают режимы механической обработки (скорость и глубина резания, охлаждение), приводящие к поверхностному наклепу. Поверхностный наклеп особенно нежелателен для образцов малых размеров (микрообразцы, тонкостенные). Некоторые виды термообработки, например закалка, приводят к неоднородности структуры образца, особенно при большом его сечении, так как глубина термообработанного слоя может быть невелика.

Геометрические формы образцов из металлов и сплавов, предназначенных для исследования упругопластических и прочностных свойств, весьма многообразны, но наиболее широко используются образцы в виде стержня с утолщениями на его концах (рис. 1.1). Эти утолщения называются головками. Форма головки зависит от








**Рис. 1.1.** Цилиндрический образец для испытаний на растяжение:
*1* — головка; *2* — рабочая часть

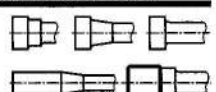


**Рис. 1.2.** Типы головок цилиндрических образцов для испытаний на растяжение

конструкции захватов испытательной машины, соответствующих виду нагрузок на образец (рис. 1.2).

Для плоских образцов конструкции головок более однообразны по форме (рис. 1.3). Переход от рабочей части к головкам делается плавным, без резкого изменения формы, чтобы уменьшить концентрацию напряжений и тем самым обеспечить в рабочей части образца однородное и одноосное напряженное состояние. Длина рабочей части в 5–10 раз превышает ее наибольший поперечный размер. Переходный участок выполняется в виде торообразной или конической поверхности. Способ закрепления образцов не должен допускать их проскальзывания относительно захватов, смятия опорных поверхностей головок, а также разрушения образцов на переходных участках и в головках. Технология изготовления образцов должна обеспечивать строгую соосность головок и рабочей части, перпендикулярность опорных плоскостей головок к оси образца. Благодаря высокой точности изготовления образца, осуществляется качественное центрирование его в захватах современных испытательных машин и предотвращается внецентренное растяжение [3].

При испытании на растяжение образцов, находящихся в хрупком состоянии, принимаются все меры к снижению концентрации напряжений и к высокоточному осевому нагружению образца [5]. Образец из хрупкого материала показан на рис. 1.4.

Образцы для испытаний на одноосное сжатие, как правило, не имеют головок и представляют

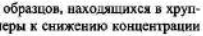


**Рис. 1.3.** Головки плоских образцов для испытаний на растяжение

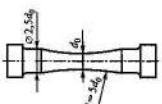



**Рис. 1.4.** Образец из хрупкого материала для испытаний на растяжение

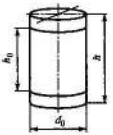
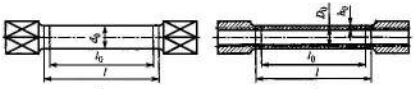



**Рис. 1.5.** Образец для испытаний на сжатие

собой короткие цилиндры или призмы в зависимости от вида заготовки. Отношение длины рабочей части образца к его наибольшему поперечному размеру для предотвращения изгиба не должно превышать трех (рис. 1.5). Торцы образца необходимо изготовить параллельными друг другу и перпендикулярными оси образца.

Образцы для испытаний на кручение имеют примерно такую же форму, как и образцы для испытаний на растяжение. Применяются как сплошные (рис. 1.6, *а*), так и полые образцы, поперечное сечение которых — тонкостенное кольцо (рис. 1.6, *б*). Переходный участок выполняется в виде торообразной поверхности. Конструкция головок должна обеспечить передачу крутящего момента к рабочей части образца. Головки имеют две или четыре грани для передачи крутящего момента от захватов испытательной машины к образцу. На рабочей части выделяется расчетный участок, в пределах которого устанавливаются угломерные устройства, позволяющие определять угол закручивания.




*а* *б*

**Рис. 1.6.** Образцы для испытаний на кручение:
*а* — сплошной; *б* — трубчатый





Образцы для испытаний при сложном напряженном состоянии представляют собой тонкостенные цилиндрические трубы с головками, конструкция которых зависит от видов тех нагрузок, которые должны быть переданы рабочей части (осевая сила, крутящий момент, внутреннее или внешнее давление либо их сочетание) [4]. При проведении испытаний в камерах высокого давления применяются сплошные цилиндрические образцы [5]. Размеры и форма образцов для этого вида испытаний не регламентируются.

Некоторые виды механических испытаний образцов металлов и сплавов регламентируются нормативами. К ним относятся испытания на растяжение при комнатной, пониженной и повышенной температурах, на сжатие и на кручение. В процессе этих испытаний определяются механические характеристики металлов и сплавов. Под механической характеристикой понимается величина, характеризующая упругие, прочностные или деформационные свойства металлов и сплавов.

Механические характеристики носят условный характер [6], так как зависят от метода испытаний и способа обработки экспериментальных данных, поэтому оценку механических характеристик проводят строго регламентированными методами, что необходимо для обеспечения сопоставимости их значений. Механические характеристики металлов и сплавов определяются в условиях однородного напряженно-деформированного состояния и используются в расчетах на прочность и жесткость элементов конструкций и сооружений.

К механическим характеристикам относятся: модуль упругости, коэффициент Пуассона, модуль сдвига, пределы пропорциональности, упругости, текучести и прочности, относительные остаточные удлинения и сужения после разрыва.

### Испытания на растяжение

Наиболее распространенными в настоящее время являются испытания цилиндрических и плоских образцов в условиях одноосного растяжения [6]. Широкому применению этого вида испытаний способствует относительная простота их осуществления, так как имеется большой парк разрывных и универсальных испыта-

тельных машин. Разработаны и весьма часто используются надежные и высокочувствительные приборы (тензометры) для измерения линейных перемещений (деформаций). В современных испытательных машинах широко применяются ЭВМ для управления процессами испытаний, сбора и обработки экспериментальных данных.

Метод испытаний образцов из металлов и сплавов на растяжение при комнатной температуре (10...35 °С) регламентируется ГОСТ 1497–84, предусматривающим семь типов цилиндрических и два типа плоских образцов, которые отличаются друг от друга формой и размерами.

Испытание на растяжение заключается в деформировании закрепленного в захватах испытательной машины образца из исследуемого материала до наступления его разрушения. В процессе испытаний измеряются сила, действующая на образец, и удлинение его расчетного участка.

Первичным результатом испытаний на растяжение является зависимость силы от удлинения, которая носит название диаграммы растяжения образца. Эта зависимость представляется или в графической форме, или в цифровой. В испытательных машинах старых конструкций диаграмма растяжения образца записывалась диаграммными аппаратами механического типа, в машинах улучшенных конструкций эта диаграмма регистрировалась электромеханическими двухкоординатными самописцами, в современных испытательных машинах зависимость $F = f(\Delta l)$ регистрируется в цифровой форме, выводится на экран монитора и печатающее устройство.

Функция $F = f(\Delta l)$ зависит от свойств не только материала, но и образца как геометрического тела. Для оценки механических свойств металла необходимо исключить размеры образца. Это можно сделать, предположив, что на расчетном участке образца реализуется однородное напряженно-деформированное состояние. Переход от диаграммы растяжения образца к диаграмме растяжения материала осуществляется путем вычисления нормальных напряжений в поперечном сечении расчетного участка образца:





$$\sigma = \frac{F}{A_0},$$

где $F$ — сила, приложенная к образцу; $A_0$ — начальная площадь поперечного сечения образца.

Принятая гипотеза об однородности деформированного состояния эквивалентна гипотезе плоских сечений [4], согласно которой поперечные сечения образца, плоские до нагружения, остаются плоскими и после нагружения, смещаясь вдоль оси образца относительно друг друга. Эта гипотеза позволяет вычислить относительную продольную деформацию образца

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l_0},$$

где $\Delta l$ — удлинение расчетного участка образца; $l_0$ — начальная длина расчетного участка образца.

Зависимость $\sigma \approx \varepsilon$, полученная при указанных условиях, называется условной диаграммой растяжения металла. Условность ее заключается в том, что она получена при неизменных начальных размерах расчетного участка образца, в то время как при испытании на растяжение начальная площадь поперечного сечения образца уменьшается, а начальная длина расчетного участка увеличивается. При малых деформациях изменения начальных размеров рабочей части образца незначительны, поэтому учет этих изменений не проводится. При больших деформациях изменение начальных размеров должно быть учтено, тогда

$$S = \frac{F}{A}, \quad e = \frac{\Delta l}{l},$$

где $A$ — площадь поверхности поперечного сечения расчетного участка образца; $l$ — длина расчетного участка образца.

Диаграмма растяжения металла, полученная при этих условиях, называется истинной. Чаще в расчетной практике используются условные диаграммы растяжения (рис. 1.7, 1.8), которые отличаются большим разнообразием.

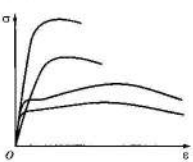



**Рис. 1.7.** Условные диаграммы растяжения материалов, находящихся в пластичном состоянии




**Рис. 1.8.** Условные диаграммы растяжения материалов, находящихся в хрупком состоянии

Основные особенности диаграммы растяжения металлов можно рассмотреть на примере диаграммы растяжения низкоуглеродистой отожженной стали (содержание углерода до 0,30 %). Примерный вид этой диаграммы показан на рис. 1.9.

Эта диаграмма условно может быть разделена на четыре участка [7]. Участок $OA$ называется зоной упругости. В этой зоне напряжения и деформации связаны законом Гука

$$\sigma = E\varepsilon,$$

где $E$ — модуль упругости.

Для металлов численное значение модуля упругости примерно постоянно, а сам модуль называется упругой постоянной материала и характеризует сопротивление упругим деформациям. Для сталей $E = (2{,}0\ldots2{,}2) \cdot 10^5$ МПа, для алюминиевых сплавов $E = (0{,}7\ldots0{,}75) \cdot 10^5$ МПа, для молибденовых сплавов $E = 3{,}3 \cdot 10^5$ МПа и т. д. Закон Гука соблюдается до достижения напряжения, называемого пределом пропорциональности (точка $A$). Пределом пропорциональности $\sigma_{пц}$ называется наибольшее напряжение, при котором еще соблюдается прямопропорциональная зависимость между напряжением и деформацией.

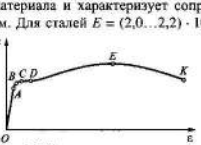



**Рис. 1.9.** Диаграмма растяжения низкоуглеродистой стали





На практике используют понятие условного (технического) предела пропорциональности, который находится из условия строго определенного отклонения от закона Гука, установленного техническими условиями.

Условным пределом пропорциональности называется такое напряжение, при котором тангенс угла наклона касательной к диаграмме $\sigma \approx \varepsilon$ в 1,5 раза больше тангенса угла наклона линейного участка этой диаграммы (угол отсчитывается от оси $\sigma$).

Участок $CD$ (см. рис. 1.9) называется зоной общей текучести, а почти горизонтальный участок диаграммы — площадкой текучести. Между точками $A$ и $C$ располагается переходный участок, который характеризуется тем, что здесь закон Гука нарушается и в исследуемом металле начинают накапливаться пластические деформации. Между точками $A$ и $C$ можно найти точку $B$, которая является границей между упругими (обратимыми) и упругопластическими деформациями. Напряжение, соответствующее точке $B$, называется пределом упругости $\sigma_y$. Это максимальное напряжение, до достижения которого все деформации в металле упругие, т. е. обратимые. На практике используют понятие условного предела упругости.

Условным пределом упругости называется напряжение, при котором значение пластической деформации равно значению, указанному в ГОСТ 1497–84. Пластическая деформация, соответствующая условному пределу упругости, может иметь различные значения, например 0,01, 0,02 или 0,05 %. Это зависит от чувствительности тензометров, применяемых для измерения малых упругопластических деформаций, и запросов практики.

Важнейшей механической характеристикой металлов и сплавов, находящихся в пластичном состоянии, является предел текучести. При наличии на диаграмме растяжения площадки текучести можно определить физический предел текучести как напряжение, соответствующее площадке текучести.

Физическим пределом текучести $\sigma_т$ называется напряжение, при котором начинают интенсивно накапливаться пластические деформации. Этот процесс происходит при почти постоянном напряжении.

Диаграммы растяжения большинства металлов и сплавов не имеют площадок текучести. В этом случае определяется условный предел текучести.

Условным пределом текучести называется напряжение, при котором пластическая деформация достигает определенного значения. Величина допуска на пластическую деформацию устанавливается ГОСТ 1497–84 и колеблется в пределах от 0,1 до 0,5 % в зависимости от возможностей испытательного оборудования и практической необходимости. Однако чаще используется значение 0,2 %.

Участок *DE* (см. рис. 1.9) называется зоной упрочнения. В пределах этой зоны деформация металла сопровождается возрастанием напряжения, но скорость его роста во много раз меньше, чем в зоне упругости. В конце зоны упрочнения (точка *E*) достигается максимальное напряжение, которое называется пределом прочности. Предел прочности металла $\sigma_в$ вычисляется как отношение максимальной силы, воспринятой образцом при испытании до наступления его разрушения, к начальной площади поперечного сечения.

У материалов, находящихся в пластичном состоянии, значение предела прочности существенно отличается от значений напряжений, которые развиваются в данный момент испытаний в образце, так как произошло значительное изменение размеров образца. У материалов, находящихся в малопластичном и хрупком состояниях, предел прочности соответствует действующим в этот момент напряжениям. Предел прочности и предел текучести являются важнейшими механическими характеристиками металлов и сплавов, их значения приведены в справочной литературе.

Участок *EK* диаграммы растяжения (см. рис. 1.9) называется зоной местной текучести. В этой зоне на рабочей части образца образуется местное утонение, которое называется шейкой. Удлинение образца в этот период испытаний в основном происходит за счет деформации шейки. Части образца, удаленные от шейки, практически не удлиняются.





Кроме характеристик прочности ($\sigma_{пц}$, $\sigma_у$, $\sigma_т$ и $\sigma_в$) при испытаниях на растяжение находят характеристики деформационных свойств металлов. Две из них — относительное остаточное удлинение после разрыва и относительное остаточное сужение после разрыва — регламентированы нормативными документами.

### Испытания на сжатие

Испытания на сжатие проводятся для металлов и сплавов, находящихся как в пластичном, так и в малопластичном состоянии. Этот метод испытаний регламентируется ГОСТ 25.503–84 и осуществляется при температуре 10…35 °С и статическом деформировании. ГОСТ 25.503–84 предусматривает три типа образцов с гладкими торцами и один — с выточками на торцах. Тип образцов выбирают в зависимости от определяемых механических характеристик. По результатам испытаний образцов на сжатие находят следующие механические характеристики металлов и сплавов: модуль упругости, пределы пропорциональности и упругости; физический и условный пределы текучести и предел прочности.

Условия, которые должны соблюдаться при испытании на сжатие, те же, что и при испытании на растяжение. Однако предъявляются более высокие требования к центрированию образца: абсолютно недопустим перекос опорных плит, передающих силу образцу. Испытания на сжатие проводятся, как правило, с применением специального приспособления, в котором этот перекос предотвращается (рис. 1.10).

При испытаниях на сжатие образец стандартных формы и размеров помещается в приспособление, установленное в испытательной машине, и подвергается непрерывному плавному дефор-

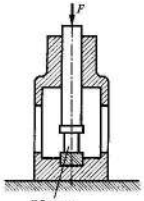



**Рис. 1.10.** Приспособление, применяемое при испытаниях на сжатие




**Рис. 1.11.** Изменение формы образца при сжатии

мированию до достижения заданного значения деформации или до наступления разрушения. При этом регистрируется зависимость между сжимающей силой и укорочением расчетной длины образца в виде диаграммы сжатия образца.

Испытание на сжатие имеет характерные особенности, существенно отличающие его от испытания на растяжение [8]. Эти особенности заключаются в следующем.

1. Образцы из пластичных металлов не разрушаются, имея значительную деформацию, превосходящую деформацию при разрыве в условиях одноосного растяжения.

2. Результаты испытаний образцов на сжатие существенно зависят от отношения расчетной длины образца к его диаметру.

3. На предел прочности и характеристики пластичности значительно влияют силы трения на опорных торцах образца.

В процессе нагружения образца сжимающими силами длина уменьшается, а диаметр увеличивается, причем по длине образца диаметр увеличивается неравномерно. Это приводит к существенному изменению формы образца — он становится бочкообразным (рис. 1.11). Бочкообразность образца при сжатии возникает вследствие трения контактирующих поверхностей сжимаемого образца и приспособления. Силы трения препятствуют поперечной деформации образца.

Характер напряженно-деформированного состояния в образце при развитой бочкообразности неодноосный и неоднородный. Учесть эту неоднородность при обработке результатов испытаний на сжатие невозможно, поэтому принимают, что по всему объему образца напряженное состояние однородное и одноосное [6]. Таким образом,

$$\sigma = \frac{F}{A_0},$$

где $\sigma$ — нормальное напряжение в поперечном сечении образца; $F$ — сила, действующая на образец; $A_0$ — начальная площадь поверхности поперечного сечения образца.





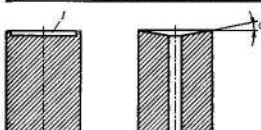



**Рис. 1.12.** Образец с торцевыми полостями: *1* — полости для введения смазочного материала

**Рис. 1.13.** Образцы с коническими торцами: *а* — с центральным отверстием; *б* — без отверстия

Чтобы действительное напряженное состояние в образце соответствовало принятому, необходимо уменьшить или исключить силы трения. Это достигается введением смазочного материала в полости на торцах образца (рис. 1.12) или созданием конических торцевых поверхностей с углом $\alpha$, равным углу трения между соприкасающимися поверхностями образца и приспособления (рис. 1.13).

Можно сочетать приведенные способы борьбы с трением. В качестве смазочного материала применяют вазелин, фторопласт, парафин, парафинированную бумагу, тефлон и др. Полностью устранить силы трения между контактирующими поверхностями в процессе испытаний на сжатие не удается. В этом заключается принципиальный недостаток этих испытаний.

Чем меньше отношение расчетной длины образца к его диаметру, тем большее влияние оказывает трение на результаты испытаний [8]. С этих позиций следовало бы проводить испытания с применением возможно более длинных образцов. Однако при сжатии длинных образцов трудно избежать их изгиба. Оптимальным для цилиндрических образцов является отношение $\frac{h_0}{d_0} = 1...3$.

Диаграмму сжатия материала получают тем же способом, что и диаграмму растяжения. Методика определения механических

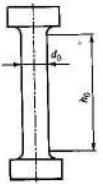



**Рис. 1.14.** Высокий образец для испытаний на сжатие

характеристик металлов и сплавов, таких, как модуль упругости, пределы пропорциональности, упругости, текучести и прочности, полностью соответствует методике определения этих характеристик при испытании на растяжение.

При определении характеристик сопротивления материала упругим и малым упругопластическим деформациям используют высокие образцы с отношением $\frac{h_0}{d_0} = 4...8$ (рис. 1.14).

Для измерения таких деформаций должны применяться тензометры, устанавливаемые на расчетном участке образца, причем база тензометра должна быть меньше начальной длины расчетного участка образца на величину, равную $(0,5...1,0)d_0$.

Предел прочности металлов, находящихся в пластичном состоянии, при сжатии определить не удается, так как образцы из таких материалов сильно сплющиваются, оставаясь сплошными, т. е. не разрушаются.

Диаграмму сжатия материала получают из диаграммы сжатия образца, принимая

$$\sigma = \frac{F}{A_0}, \quad \varepsilon = \frac{\Delta h}{h_0},$$

где $\Delta h$ — изменение длины образца; $h_0$ — начальная длина расчетного участка образца.

Диаграмма сжатия отожженной низкоуглеродистой стали представлена на рис. 1.15, она типична для пластичных материалов.

Участок $OГ$ этой диаграммы практически совпадает с диаграммой растяжения этого материала. На диаграмме сжатия отсутствует точка, соответствующая пределу прочности, поэтому его установить невозможно. Испытание на сжатие образца из металла, находящегося в пластичном состоянии, прекращают при деформации, примерно равной 50 %.





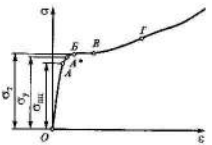



**Рис. 1.15.** Диаграмма сжатия низкоуглеродистой стали

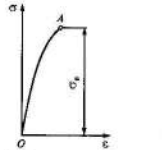



**Рис. 1.16.** Диаграмма сжатия серого чугуна

Для металлов, находящихся в малопластичном и хрупком состояниях, можно найти предел прочности при сжатии. Типичным представителем таких материалов является серый чугун, диаграмма сжатия которого показана на рис. 1.16. Конечная точка $A$ этой диаграммы соответствует пределу прочности серого чугуна при сжатии.

## Испытания на кручение

Механические испытания в условиях двухосного напряженного состояния осуществляются чаще всего путем кручения тонкостенной трубы [4]. В этом случае реализуется напряженное состояние, называемое чистым сдвигом и характеризующееся двумя равными по модулю и различными по знаку главными напряжениями.

Испытания на кручение проводятся в соответствии с требованиями ГОСТ 3565–80, который предусматривает испытание цилиндрических сплошных и трубчатых образцов. Испытания на кручение проводятся в основном для металлов и имеют ограниченное распространение. Это связано с тем, что в сплошных образцах при кручении реализуется неоднородное плоское напряженное состояние, точный анализ которого при упругопластическом деформировании невыполним. Поэтому сплошные образцы используются в основном при испытаниях на кручение малопла-

стичных и хрупких материалов, когда разрушение наступает при очень малых пластических деформациях и анализ напряженно-деформированного состояния возможен с достаточной точностью [9].

При испытании на кручение тонкостенных трубчатых образцов (см. рис. 1.6, *б*) достигается однородное напряженно-деформированное состояние, но довести до разрушения образцы из металла, находящегося в пластичном состоянии, не удается. Такие образцы теряют устойчивость, поэтому трубчатые образцы испытывают до достижения напряжений, незначительно превосходящих предел текучести металла при сдвиге.

С целью предотвращения смятия трубчатого образца в захватах испытательной машины в его внутреннюю полость в районе головок необходимо плотно вставить стальные вкладыши. Испытание на кручение тонкостенных трубчатых образцов при больших пластичных деформациях сопровождается потерей устойчивости стенки трубы, что делает невозможным дальнейшее изучение зависимости касательного напряжения от угла сдвига. Чтобы отдалить потерю устойчивости, необходимо ввести во внутреннюю полость рабочей части образца специальное приспособление, состоящее из множества бронзовых колец, свободно вращающихся относительно оси образца [5].

Для измерения углов закручивания на расчетный участок образца устанавливается угломерное устройство (тензометр), которое измеряет угол поворота одного сечения относительно другого. Чтобы распространить результаты измерений на внешней поверхности образца на весь его объем, необходимо, как и в случае растяжения образца, принять гипотезу плоских сечений, согласно которой каждое поперечное сечение стержня в результате действия внешних моментов поворачивается в своей плоскости на некоторый угол как единое жесткое целое [4]. В поперечном сечении тонкостенного образца при кручении возникают только касательные напряжения, распределенные равномерно в силу его тонкостенности.

В процессе испытаний на кручение получают зависимость крутящего момента от угла закручивания $M_к = f(\vartheta)$. Эта зависимость называется диаграммой кручения образца. Типичная диаграмма кручения образца из металла, находящегося в пластичном состоянии, представлена на рис. 1.17.





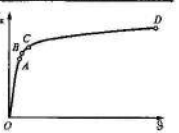



**Рис. 1.17.** Диаграмма кручения образца из металла, находящегося в пластичном состоянии

Для этой диаграммы характерны два участка, из которых участок $OA$ отражает закручивание образца в пределах упругости, а участок $AD$ — упругопластическое деформирование. Этот участок называют зоной упрочнения. Граница между участком $OA$ и участком $AD$ чаще всего не бывает резкой, однако для отожженной низкоуглеродистой стали наблюдается более резкий переход от упругого состояния к упругопластичному.

Переход от диаграммы кручения образца к диаграмме сдвига металла осуществляется по формулам

$$\tau = \frac{2M_к}{\pi D_0^2 h_0}, \quad \gamma = \frac{D_0}{2l_0}\vartheta,$$

где $\tau$ — касательное напряжение; $\gamma$ — угол сдвига; $M_к$ — крутящий момент; $\vartheta$ — угол закручивания; $D_0$ — средний диамстр образца; $h_0$ — толщина стенки образца; $l_0$ — расстояние между сечениями, на котором измеряется взаимный угол закручивания.

По диаграмме сдвига $\tau = f(\gamma)$ можно определить механические характеристики металла. К этим характеристикам относятся модуль сдвига $G$, предел пропорциональности $\tau_{пц}$, предел упругости $\tau_у$, предел текучести $\tau_т$ и предел прочности $\tau_в$. Характеристики пластических свойств металлов при сдвиге не определяются.

Диаграмму сдвига металла можно также получить, испытывая сплошной образец круглого поперечного сечения. Но для этого нужно принять в дополнение к гипотезе плоских сечений еще и гипотезу о прямолинейности радиусов. В образце круглого поперечного сечения при испытании на кручение реализуется неоднородное напряженно-деформированное состояние, что затрудняет обработку экспериментальных данных.

Для образца круглого поперечного сечения имеет место следующая зависимость между углом закручивания $\vartheta$ и наибольшим углом сдвига $\gamma_{max}$ вблизи внешней поверхности образца:

$$\gamma_{max} = \vartheta \frac{d_0}{2l_0},$$

где $d_0$ — начальный диаметр расчетного участка образца; $l_0$ — расстояние между сечениями, на котором измеряется взаимный угол закручивания.

Наибольшие касательные напряжения в образце круглого поперечного сечения возникают вблизи его внешней поверхности и в пределах применимости закона Гука вычисляются по формуле

$$\tau_{max} = \frac{M_к}{W_p},$$

где $M_к$ — крутящий момент; $W_p$ — полярный момент сопротивления круглого поперечного сечения.

При кручении образца за пределом применимости закона Гука касательные напряжения в поперечном сечении образца распределяются нелинейно. Закон распределения касательных напряжений в этом случае устанавливается в теории пластичности. Наибольшие касательные напряжения при кручении сплошных цилиндрических образцов вычисляются по формуле Людвига—Кармана [9]

$$\tau_{max} = \frac{4}{\pi d_0^3}\left(3M_к + \frac{dM_к}{d\vartheta}\vartheta\right).$$

Диаграмма сдвига металла, находящегося в пластичном состоянии, показана на рис. 1.18. Она зависит от его структуры, условий испытаний (температуры, скорости деформаций, жесткости испытательной машины).

Начальный участок $OA$ диаграммы сдвига линейный, т. е. максимальные касательные напряжения $\tau_{max}$ пропорциональны максимальным углам сдвига $\gamma_{max}$.





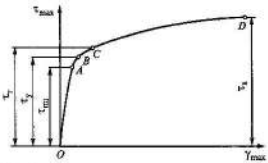



**Рис. 1.18.** Диаграмма сдвига металла, находящегося в пластичном состоянии

Закон пропорциональности, называемый законом Гука при сдвиге, может быть записан как

$$\tau = G\gamma,$$

где $G$ — модуль сдвига — упругая постоянная материала, характеризует сопротивление материала упругим деформациям.

Разрушение образцов из металлов при испытаниях на кручение может происходить путем среза или отрыва.

### Испытания в условиях сложного напряженного состояния

Металлы и сплавы в реальных конструкциях чаще всего работают в условиях сложного напряженного состояния. Расчет элементов конструкций на прочность выполняется с применением критериев прочности и разрушения, справедливость которых можно установить только экспериментально [4]. Поэтому методы испытаний образцов в условиях сложного напряженного состояния представляют объект научно-исследовательской работы. Проведение таких испытаний возможно только в отдельных научно-исследовательских лабораториях, так как эти эксперименты реализуются на специально созданных установках, не являющихся в отличие от разрывных и универсальных ис-

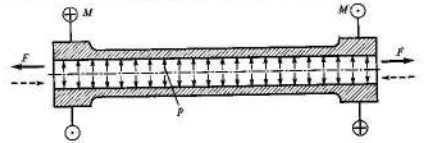



**Рис. 1.19.** Нагружение трубчатого образца

пытательных машин предметом серийного производства. Некоторые зарубежные фирмы по особым заказам создают установки такого типа.

Методы испытаний образцов в условиях сложного напряженного состояния не регламентированы нормативными документами.

Наиболее методически отработанными для металлов являются испытания тонкостенных трубчатых образцов в условиях плоского напряженного состояния, которое реализуется при нагружении трубчатого образца осевой силой, крутящим моментом и внутренним давлением (рис. 1.19). Такое нагружение трубчатого образца обеспечивает широкий диапазон напряженных состояний как при простом, так и при сложном нагружении.

Современные установки для испытаний трубчатых образцов в условиях плоского напряженного состояния позволяют осуществлять нагружение осевой силой $N$, крутящим моментом $M_к$ и внутренним давлением $p$ независимо друг от друга или совместно при использовании автоматизированных систем управления. Эти системы дают возможность получать любые заданные траектории деформирования [3].

Трубчатые образцы должны строго удовлетворять требованиям: быть тонкостенными (отношение толщины стенки трубки к среднему диаметру должно быть 0,06 и меньше, длина расчетного участка образца должна быть больше трех диаметров, разностенность на рабочем участке не должна превышать 3 %). Необходимы тщательный контроль за технологией изготовления образцов и строгое соблюдение режима термообработки.





При малых значениях отношения толщины стенки к диаметру можно считать напряженное состояние однородным как по радиусу, так и вдоль оси образца. При этом нужно с высокой точностью прикладывать к образцу осевую силу и крутящий момент.

Компоненты напряжений можно рассчитать по формулам

$$\sigma_z = \frac{N}{\pi D_0 h_0}, \qquad \sigma_t = \frac{pD_0}{2h_0}, \qquad \tau_{zt} = \frac{2M_к}{\pi D_0^2 h_0},$$

где $N$, $p$, $M_к$ — осевая сила, давление и крутящий момент соответственно; $D_0$ — средний диаметр трубчатого образца; $h_0$ — толщина стенки трубчатого образца.

Для испытания листовых полуфабрикатов в условиях плоского напряженного состояния используют крестообразные образцы [3], нагружаемые растягивающими силами (рис. 1.20). В центральной части таких образцов реализуется двухосное растяжение с различным соотношением между главными напряжениями. Эти образцы применяют для исследования их разрушения в условиях плоского напряженного состояния. При использовании образцов этого типа нужно иметь в виду, что область, где обеспечивается однородное напряженно-деформированное состояние, невелика, поэтому для измерения деформаций нужно применять малобазные высокочувствительные тензометры.

Испытания в условиях трехосного напряженного состояния также являются предметом научно-исследовательской работы, так как осуществить их можно только в отдельных лабораториях, оснащенных уникальными испытательными машинами и установками [5].

Во внутреннюю полость тонкостенного цилиндрического образца подводится жидкость под давлением $p_1$, а снаружи образец погружен в жидкость, находящуюся под давлением $p_2$, причем

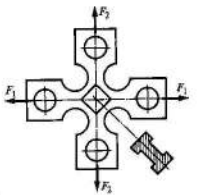



**Рис. 1.20.** Крестообразный плоский образец

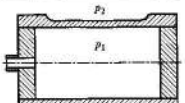



**Рис. 1.21.** Трубчатый образец, нагруженный внутренним и внешним давлениями

соотношение между значениями давлений $p_1$ и $p_2$ поддерживается на протяжении опыта постоянным (рис. 1.21). Напряженное состояние в стенке трубы однородное. Возможна реализация напряженных состояний различных типов (трехосное сжатие, двухосное сжатие и смешанное напряженное состояние).

В условиях трехосного напряженного состояния возможно испытание сплошных образцов. Такой образец помещается в камеру, в которой поддерживается высокое давление, кроме того, он подвергается воздействию осевой растягивающей или сжимающей силы (рис. 1.22). Комбинируя значения давления и осевой силы, можно получить разнообразные трехосные напряженные состояния [5].

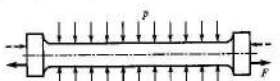



**Рис. 1.22.** Сплошной образец под воздействием внешнего давления и осевой силы

Возможно проведение испытаний и при простом нагружении, когда компоненты тензора напряжений пропорциональны одному параметру, например давлению.

# Глава 2
# Определение фундаментальных механических характеристик материалов

## 2.1. Испытания образцов на растяжение

Испытания образцов на растяжение проводятся с целью экспериментального определения механических характеристик материалов: предела пропорциональности $\sigma_{пц}$, предела упругости $\sigma_у$, предела текучести $\sigma_т$, предела прочности $\sigma_в$, истинного сопротивления разрыву $S_к$, относительного удлинения $\delta$ и относительного сужения $\psi$ после разрыва [9].

### Характеристика установки

Для определения механических характеристик материалов используют испытательные машины. Применяют разрывные и универсальные испытательные машины всех систем, соответствующие требованиям нормативных документов.

При проведении испытаний должны соблюдаться следующие основные условия: качественное центрирование образца в захватах испытательной машины; плавность деформирования; скорость перемещения активного захвата (мм/мин) при испытании до предела текучести не более 0,1, за пределом текучести — не более 0,4 длины расчетного участка образца; возможность приостанавливать нагружение с точностью до одного наименьшего деления шкалы силоизмерителя, плавность разгружения. Кинематическая схема испытательной машины с электромеханическим силовозбудителем представлена на рис. 2.1.

## Краткие теоретические сведения

При испытании на растяжение образец из исследуемого материала прочно закрепляется головками в захватах испытательной машины и подвергается непрерывному плавному деформированию до его разрушения (см. рис. 2.1). При этом зависимость между растягивающей нагрузкой и удлинением расчетного участка образца регистрируется в виде диаграммы растяжения образца. Для испытаний на растяжение применяют стандартные образцы по ГОСТ 1497–84, который предусматривает семь типов образцов. Один из них представлен на рис. 2.2. Здесь $d_0$ — начальный диаметр расчетного участка образца; $l_0$ — начальная длина расчетного участка образца; $l$ — длина рабочей части образца. Должно соблюдаться соотношение $l \geqslant l_0 + d_0$.

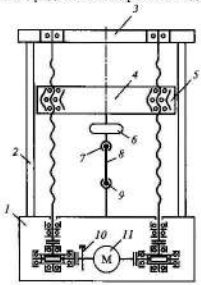



**Рис. 2.1.** Кинематическая схема испытательной машины:

*1* — основание станины; *2* — колонна; *3* — неподвижная траверса; *4* — подвижная траверса; *5* — шарико-винтовая передача; *6* — силоизмеритель; *7* — верхний (активный) захват; *8* — образец; *9* — нижний (пассивный) захват; *10* — преобразователь перемещений; *11* — электродвигатель

Отношение $l_0$ к $d_0$ должно быть строго определенным. В ГОСТ 1497–84 предусмотрено $\frac{l_0}{d_0} = 10$ или 5.

Диаграммы растяжения образцов из низкоуглеродистой стали (С ⩽ 0,30 %), конструкционной стали (С ⩾ 0,35 %) и серого чугуна приведены на рис. 2.3. Рассмотрим более подробно диаграмму растяжения образца из низкоуглеродистой стали (рис. 2.3, *а*) [9]. На начальном участке *ОА* диаграммы между силой $F$ и удлинением $\Delta l$ соблюдается прямая пропорциональная зависимость — образец подчиняется закону Гука. В точке *А* закон
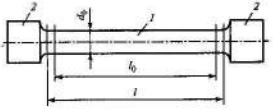







**Рис. 2.2.** Эскиз образца:

*1* — рабочая часть; *2* — головки

Гука нарушается: зависимость между силой и удлинением становится нелинейной. На диаграмме имеется горизонтальный участок *БВ*, называемый площадкой текучести. В этой стадии испытания образец удлиняется (деформируется) практически при постоянной силе. Такое явление называется текучестью: образец деформиру-

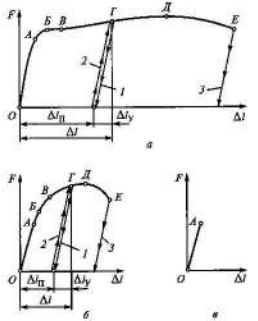



**Рис. 2.3.** Диаграммы растяжения образцов из низкоуглеродистой стали (*а*), конструкционной стали (*б*), серого чугуна (*в*)

ется равномерно по всей длине его рабочего участка. За площадкой текучести следует участок *ВД*, называемый зоной упрочнения. В точке *Д* достигается максимальная сила, которую может выдержать образец. Далее начинается участок разрушения *ДЕ*, называемый зоной местной текучести. В этой зоне на рабочем участке образца появляется местное утонение (шейка). Диаметр шейки уменьшается по мере деформирования образца, и образец разрывается по наименьшему сечению шейки.

Если при испытании на растяжение нагружение приостановить, например в точке *Г* диаграммы, и осуществить разгружение образца (прямая *1*), то окажется, что диаграмма разгружения и диаграмма предыдущего нагружения не совпадают (см. рис. 2.3, *а*, *б*). Линия разгружения — прямая *1*, параллельная начальному линейному участку *ОА* диаграммы растяжения образца. Такой характер деформирования образца при его разгружении называется законом разгружения.

При повторном нагружении диаграмма до точки *Г* совпадает с линией разгружения (прямая *2*), а затем будет совпадать с диаграммой растяжения образца при однократном нагружении. Такой характер деформирования называется законом повторного нагружения и заключается в прямой пропорциональной зависимости силы и удлинения, которая сохраняется до тех пор, пока значение силы не станет равным ее значению, достигнутому при первичном нагружении. При разгружении образца в пределах участка *ОА* законы нагружения, разгружения и повторного нагружения совпадают. Участки диаграммы за точкой *А* соответствуют удлинению образца при его деформировании, которое складывается из упругого и пластического удлинений (см. рис. 2.3, *а*), т. е.

$$\Delta l = \Delta l_y + \Delta l_n,$$

где $\Delta l$, $\Delta l_y$, $\Delta l_n$ — полное, упругое и пластическое удлинения расчетного участка образца.

При разгружении образца, получившего упругое и пластическое удлинения, упругое удлинение уменьшается в соответствии с законом разгружения, а пластическое удлинение сохраняется неизменным. При разрушении образец разгружается в соответствии с прямой *3* (см. рис. 2.3, *а*, *б*).





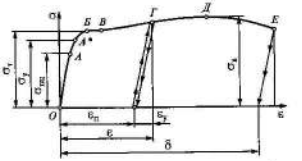



**Рис. 2.4.** Диаграмма растяжения низкоуглеродистой стали

Диаграмма растяжения образца позволяет оценить поведение материала в упругой и упругопластической стадиях деформирования, а также определить механические характеристики материала.

Для получения численно сопоставимых между собой механических характеристик материалов диаграммы растяжения образцов перестраивают в диаграммы растяжения материалов, т. е. в зависимости между напряжением σ и деформацией ε, которые определяются по формулам

$$\sigma = \frac{F}{A_0}, \quad \varepsilon = \frac{\Delta l}{l_0},$$

где $F$ — сила, приложенная к образцу; $A_0$, $l_0$ — начальная площадь поперечного сечения и начальная длина расчетного участка образца; $\Delta l$ — удлинение расчетного участка образца.

Диаграмма растяжения материала, полученная при этих условиях (без учета изменения размеров расчетного участка образца), называется условной диаграммой растяжения материала в отличие от истинной диаграммы растяжения, которую получают с учетом изменения размеров расчетного участка образца. Диаграмма растяжения материала зависит от его структуры, условий испытаний (температуры, скорости деформаций). Диаграмма растяжения низкоуглеродистой стали приведена на рис. 2.4. В пределах участка *ОА* диаграммы соблюдается закон Гука, т. е.




**Рис. 2.5.** Определение условного предела пропорциональности

$$\sigma = E\varepsilon.$$

Коэффициент пропорциональности $E$ называется модулем упругости первого рода. Он характеризует сопротивление материала упругим деформациям. Эта величина является упругой постоянной материала. Закон Гука нарушается в точке $A$ диаграммы. Ордината этой точки имеет особое наименование — предел пропорциональности.

Пределом пропорциональности $\sigma_{пц}$ называется наибольшее напряжение, до достижения которого справедлив закон Гука. Воспользоваться этим определением для практического вычисления предела пропорциональности невозможно. Поэтому вводится понятие условного (технического) предела пропорциональности. Его оценивают как напряжение, при котором отступление от прямой пропорциональной зависимости между напряжением и деформацией достигает определенного значения.

Условным пределом пропорциональности называется напряжение, при котором тангенс угла $\beta$ наклона касательной к кривой $\sigma = \varepsilon$ в 1,5 раза больше тангенса угла $\alpha$ наклона линейного участка $OA$ этой диаграммы (угол отсчитывается от оси $\sigma$) (рис. 2.5).

При некотором превышении предела пропорциональности все деформации продолжают оставаться упругими, т. е. полностью исчезающими, если напряжение снизить до нуля. Наибольшее напряжение, до достижения которого все деформации в материале упругие, называется пределом упругости $\sigma_y$. На практике пользуются условным (техническим) пределом упругости.





Условным пределом упругости $\sigma_{0,01}$ называется напряжение, при котором остаточная (пластическая) деформация составляет 0,01 %. Для нахождения на диаграмме точки $A^*$ (рис. 2.6), соответствующей пределу упругости, необходимо воспользоваться законами разгружения и повторного нагружения.

Площадке текучести на диаграмме растяжения низкоуглеродистой стали соответствует напряжение $\sigma_т$, называемое пределом текучести.

Пределом текучести (физическим) $\sigma_т$ называется напряжение, при котором в материале интенсивно накапливаются остаточные (пластические) деформации, причем этот процесс идет при почти постоянном напряжении.

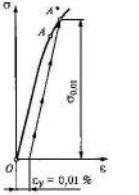



**Рис 2.6.** Определение условного предела упругости

При отсутствии площадки текучести (что характерно для диаграмм растяжения большинства материалов) определяют условный (технический) предел текучести. Условным пределом текучести $\sigma_{0,2}$ называется напряжение, при котором остаточная (пластическая) деформация составляет 0,2 %. Условный предел текучести определяется аналогично пределу упругости (рис. 2.7).

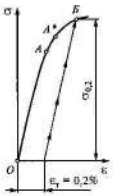



**Рис. 2.7.** Определение условного предела текучести

Показанные на рис. 2.4–2.6 построения, сделанные для определения $\sigma_{пц}$, $\sigma_{0,01}$, $\sigma_{0,2}$, можно выполнять на диаграмме $F = f(\Delta l)$, которая является первичным результатом испытания на растяжение. Посредством диаграммы $F = f(\Delta l)$ можно найти $F_{пц}$, $F_{0,01}$, $F_{0,2}$, т. е. нагрузки, соответствующие пределам пропорциональности, упругости и текучести соответственно.

Участок $ВД$ диаграммы растяжения материала (см. рис. 2.4) имеет максимум в точке $Д$.

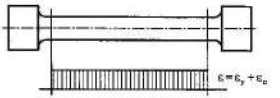



**Рис. 2.8.** Деформация рабочего участка образца до образования шейки

Ордината этой точки называется условным пределом прочности (временным сопротивлением) и определяется как

$$\sigma_в = \frac{F_{max}}{A_0}.$$

У материалов, находящихся при данных условиях в пластичном состоянии, предел прочности $\sigma_в$ не равен действительному напряжению в материале образца, так как к моменту достижения $F_{max}$ площадь поперечного сечения образца существенно уменьшается. До образования шейки (точка $Д$ диаграммы на рис. 2.4) деформация расчетного участка образца равномерная и состоит из упругой (обратимой) и пластической (остаточной) деформаций (рис. 2.8). Напряженное состояние — одноосное.

На конечном участке деформирования после возникновения шейки происходит локализация деформаций в шейке, в остальной части образца она практически не увеличивается. Деформация в шейке неоднородная, имеет высокий градиент вдоль оси образца (рис. 2.9). Напряженное состояние также становится неоднородным, кроме того, оно изменяется качественно — становится трехосным. Внутри шейки напряженное состояние — трехосное растяжение.

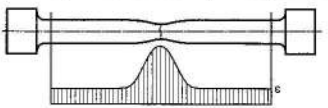



**Рис. 2.9.** Деформация рабочего участка образца после образования шейки





Образец разрывается по наименьшему поперечному сечению шейки при напряжении, существенно превышающем предел прочности. Это напряжение называется истинным сопротивлением разрыву и равно

$$S_к = \frac{F_{разр}}{A_{min}},$$

где $F_{разр}$ — сила, при которой образец разрывается; $A_{min}$ — наименьшая площадь поперечного сечения образца после разрыва.

Пластические свойства материалов оцениваются двумя характеристиками:

– относительным удлинением после разрыва

$$\delta = \frac{l_{разр} - l_0}{l_0} \cdot 100\,\%,$$

где $l_{разр}$ — длина расчетного участка образца после разрыва; $l_0$ — начальная длина расчетного участка образца;

– относительным сужением после разрыва

$$\psi = \frac{A_0 - A_{min}}{A_0} \cdot 100\,\%,$$

где $A_0$ — начальная площадь поперечного сечения расчетного участка образца; $A_{min}$ — наименьшая площадь поперечного сечения шейки при разрыве.

Методика определения механических характеристик материалов, имеющих диаграммы растяжения, отличные от диаграмм растяжения малоуглеродистой стали, остается без изменений.

## 2.2. Испытания образцов на сжатие

Испытания образцов на сжатие проводятся с целью экспериментального определения механических характеристик материалов: предела пропорциональности $\sigma_{пц}$, предела упругости $\sigma_у$, предела текучести $\sigma_т$ и предела прочности $\sigma_в$.

## Характеристика установки

Для испытаний на сжатие применяют универсальные испытательные машины.

Условия, которые должны соблюдаться при испытании на сжатие, те же, что и при испытании на растяжение, но предъявляются более высокие требования к центрированию образца: не допускается перекос опорных плит, передающих силу образцу. Поэтому испытание образцов на сжатие проводится с применением специального приспособления, в котором предотвращается этот перекос (см. рис. 1.10).

## Краткие теоретические сведения

При испытании на сжатие образец стандартных формы и размеров помещается в приспособление, установленное на испытательной машине, и подвергается непрерывному плавному деформированию до достижения заданного значения деформации или до наступления разрушения. При этом регистрируется зависимость между сжимающей силой $F$ и укорочением расчетной длины $h_0$ образца в виде диаграммы сжатия образца. Эта диаграмма позволяет оценить поведение материала образца в упругой и упругопластической стадиях деформирования и определить характеристики механических свойств материала.

Испытание проводится по ГОСТ 25.503–84. Применяются цилиндрические образцы четырех типов: три типа образцов с гладкими торцами и один — с выточками на торцах. Тип образцов выбирают в зависимости от определяемых характеристик. Для испытаний на сжатие используются, как правило, короткие образцы с отношением длины к диаметру в пределах 1…3. Применение длинных образцов недопустимо, ибо такие образцы будут не только сжиматься, но и изгибаться [6].

Образцы должны быть изготовлены с соблюдением жестких допусков на перпендикулярность оси образца к его торцам. Торцы образца тщательно шлифуются.





Испытание на сжатие широко используется для определения механических характеристик малопластичных материалов, например чугунов, инструментальных сталей, керамики и т. п.

Испытание на сжатие имеет характерные особенности, существенно отличающие его от испытания на растяжение [8]:

- образцы из пластичных материалов не разрушаются, получая значительную деформацию, превосходящую деформацию при разрыве в условиях растяжения;
- результаты испытаний образцов на сжатие существенно зависят от отношения длины образца к его диаметру;
- на предел прочности и характеристики пластичности заметно влияют силы трения на опорных торцах образца.

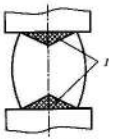



**Рис. 2.10.** Основные зоны в сжимаемом образце:
*1* — конус ограничения пластической деформации

В процессе нагружения образца сжимающими силами его длина уменьшается, а диаметр увеличивается, причем по длине образца диаметр увеличивается неравномерно. Это приводит к существенному изменению формы образца — он становится бочкообразным. Бочкообразность образца при сжатии возникает вследствие трения контактирующих поверхностей сжимаемого образца и приспособления. Трение препятствует поперечной деформации на торцах образца (см. рис. 1.11).

Так как ограничение деформации может распространяться конусообразно до оси образца (рис. 2.10), пластическая деформация при сжатии в значительной мере происходит в области, лежащей за пределами этого конуса.

Напряженное состояние в образце при развитой бочкообразности неоднооосное и неоднородное. Учесть эту неоднородность при обработке результатов испытаний на сжатие не представляется возможным, поэтому принимают, что по всему объему образца напряженное состояние однородное и одноосное. Таким образом,

$$\sigma = \frac{F}{A_0},$$

где σ — нормальное напряжение в поперечном сечении образца; $F$ — сила, действующая на образец; $A_0$ — начальная площадь поперечного сечения образца.

Чтобы действительное напряженное состояние в образце соответствовало предполагаемому, необходимо уменьшить или исключить силы трения на его торцах [6]. Это достигается введением в полости на торцах образца смазочного материала (см. рис. 1.12) или созданием конических торцевых поверхностей с углом, равным углу трения между поверхностями образца и приспособления (см. рис. 1.13). В качестве смазочного материала применяют парафин, парафинированную бумагу, вазелин, тефлон и др. Полностью устранить силы трения между контактирующими поверхностями в процессе испытаний на сжатие не удается. В этом заключается их принципиальный недостаток.

Чем меньше отношение длины образца к его диаметру, тем большее влияние оказывает трение на результаты испытаний. С этих позиций следовало бы проводить испытания с применением возможно более длинных образцов. Однако при сжатии длинных образцов трудно избежать их изгиба. Оптимальным для цилиндрических образцов является отношение $\frac{h_0}{d_0} = 1...3$.

Диаграмму сжатия материала получают тем же способом, что и диаграмму растяжения. Методика определения механических характеристик материала, таких, как предел пропорциональности, предел упругости и предел текучести, полностью соответствует методике определения этих характеристик при испытании на растяжение.

При определении характеристик сопротивления материала упругим и малым упругопластическим деформациям используют удлиненные образцы с отношением $\frac{h_0}{d_0} = 4...8$ (см. рис. 1.14). В этом случае для измерения деформации должны применяться тензометры, устанавливаемые на расчетном участке образца, причем база тензометра должна быть меньше полной длины образца на величину, равную $(0,5...1,0)d_0$.





Предел прочности $\sigma_в$ низкоуглеродистой стали при сжатии установить не удается, так как образец из такого материала сплющивается, оставаясь сплошным, т. е. не разрушается.

Диаграмму сжатия материала получают из диаграммы сжатия образца, при этом принимают

$$\sigma = \frac{F}{A_0}, \quad \varepsilon = \frac{\Delta h}{h_0}.$$

Диаграмма сжатия низкоуглеродистой стали (см. рис. 1.15) на участке $ОГ$ практически совпадает с диаграммой растяжения этого материала. На диаграмме сжатия отсутствует точка, соответствующая пределу прочности, т. е. предел прочности установить невозможно. Испытания на сжатие материала, находящегося в пластичном состоянии, прекращают при деформации, примерно равной 50 %.

Условные пределы пропорциональности $\sigma_{пц}$, упругости $\sigma_{0,01}$, текучести $\sigma_{0,2}$ определяются тем же методом, что и при растяжении.

Серый чугун в нормальных условиях находится в малопластичном состоянии, диаграмма сжатия серого чугуна приведена на рис. 1.16. Строго говоря, на диаграммах растяжения и сжатия серого чугуна нет линейного участка, где соблюдается закон Гука, однако отклонение от него невелико.

## 2.3. Испытания образцов на кручение

Испытания образцов на кручение проводятся с целью экспериментального определения механических характеристик материалов при чистом сдвиге: модуля сдвига $G$, предела пропорциональности $\tau_{пц}$, предела упругости $\tau_у$, предела текучести $\tau_т$, предела прочности $\tau_в$; оценивается характер разрушения (сдвиг, отрыв) [9].

### Характеристика установки

Для испытаний на кручение может быть использована любая испытательная машина, удовлетворяющая требованиям ГОСТ 3565–80. Она должна быть дополнительно оснащена навесным угломером.

### Краткие теоретические сведения

При испытании на кручение образец из исследуемого материала прочно закрепляется головками в захватах испытательной машины и подвергается непрерывному плавному деформированию до наступления разрушения. При проведении испытаний образцов на кручение должны соблюдаться следующие основные условия: качественное центрирование образца в захватах, плавность нагружения и разгружения, отсутствие продольной силы.

Для испытаний на кручение применяют образцы по ГОСТ 3565–80. Можно использовать как сплошные, так и трубчатые образцы. Образец сплошного поперечного сечения представлен на рис. 1.6, *а*.

Конструкция головок образца должна обеспечивать передачу крутящего момента от активного захвата к рабочему участку образца и от рабочего участка к моментоизмерителю. Размеры образца: начальный диаметр расчетного участка $d_0$, начальная длина расчетного участка $l_0$, длина рабочей части $l$, при этом должны соблюдаться условия:

$$l \geqslant l_0 + d_0, \quad \frac{l_0}{d_0} = 10 \text{ или } 5.$$

Наилучшими для испытаний на кручение являются тонкостенные трубчатые образцы с кольцевым поперечным сечением [10] (см. рис. 1.6, *б*), так как в них распределение напряжений по длине и радиусу равномерное. Недостаток тонкостенных образцов заключается в том, что они теряют устойчивость при больших пластических деформациях.

Испытание на кручение проводится как для пластичных, так и для малопластичных и хрупких материалов. Этот вид испытаний





позволяет выявить пластические свойства материалов, находящихся в хрупком состоянии, в этом заключается преимущество испытаний на кручение перед испытаниями на растяжение. При испытании на кручение на образцах не образуется шейка, вследствие чего крутящий момент возрастает до наступления разрушения образца. Пластическая деформация равномерна по длине образца, цилиндрическая форма сплошного образца сохраняется до его разрушения [8].

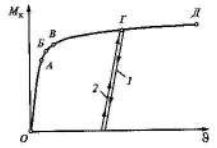



**Рис. 2.11.** Диаграмма кручения образца из пластичного материала:
*1* — разгружение; *2* — повторное нагружение

Рассмотрим диаграмму кручения образца из материала, находящегося в пластичном состоянии (рис. 2.11).

На начальном участке диаграммы между крутящим моментом $M_к$ и углом закручивания $\vartheta$ соблюдается прямая пропорциональная зависимость — образец деформируется линейно — упруго. В точке $А$ начинается участок диаграммы, называемый зоной упрочнения и характеризующийся малым темпом увеличения крутящего момента и большим темпом приращения угла закручивания. Конечная точка $Д$ диаграммы соответствует разрушению образца. Образцы из разных материалов при испытании на кручение разрушаются по-разному: поверхность разрушения, перпендикулярная оси образца, указывает на разрушение от среза, винтовая поверхность — на разрушение от отрыва.

Если при испытании на кручение нагружение приостановить, например, в точке $Г$ диаграммы и осуществить разгружение образца, то окажется, что диаграмма разгружения и диаграмма предыдущего нагружения не совпадают. Линия разгружения — почти прямая, параллельная начальному линейному участку $ОА$ диаграммы кручения образца. Такой характер деформирования образца при его разгружении называется законом разгружения.

Если осуществить повторное нагружение, то диаграмма до точки $Г$ совпадает с линией разгружения, а затем будет совпадать

с диаграммой кручения образца при однократном нагружении до его разрушения. Такой характер деформирования называется законом повторного нагружения и заключается в прямой пропорциональной зависимости приращения крутящего момента и приращения угла закручивания, которая сохраняется до тех пор, пока значение крутящего момента не станет равным его значению, достигнутому при первичном нагружении. Если осуществить разгружение образца на участке $OA$, то законы нагружения, разгружения и повторного нагружения совпадут.

Угол закручивания образца при его деформировании за точкой $B$ диаграммы складывается из угла $\vartheta_y$, соответствующего упругой деформации сдвига, подчиняющегося закону Гука, и угла закручивания $\vartheta_n$, соответствующего пластической деформации сдвига, т. е.

$$\vartheta = \vartheta_y + \vartheta_n.$$

При разгружении образца, получившего упругую и пластическую угловые деформации, угол закручивания, соответствующий упругой деформации, уменьшается, а угол закручивания, соответствующий пластической деформации, сохраняется неизменным.

Диаграмма кручения образца позволяет оценить поведение материала образца в упругой и упругопластической стадиях деформирования, определить механические характеристики материала при чистом сдвиге. Для получения численно сопоставимых между собой механических характеристик материала диаграмму кручения образцов перестраивают в диаграмму сдвига материала. Диаграммой сдвига материала называется зависимость между касательными напряжениями $\tau$, возникающими в материале при чистом сдвиге, и соответствующими углами сдвига $\gamma$.

Для образца круглого поперечного сечения справедлива следующая геометрическая зависимость между углом закручивания $\vartheta$ и наибольшим углом сдвига $\gamma_{max}$ вблизи внешней поверхности образца (рис. 2.12):

$$\gamma_{max} = \frac{\vartheta d_0}{2l_0}, \qquad (2.1)$$





где $d_0$, $l_0$ — соответственно начальные диаметр и длина расчетного участка образца, на котором измеряется угол закручивания.

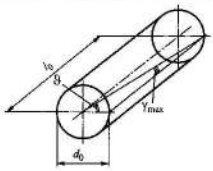



**Рис. 2.12.** Деформированное состояние расчетного участка образца при кручении

Касательные напряжения в образце круглого поперечного сечения в пределах упругости распределяются по линейной зависимости. Наибольшие касательные напряжения при кручении образца круглого поперечного сечения возникают в точках вблизи внешней поверхности и в пределах применимости закона Гука вычисляются по формуле

$$\tau_{max} = \frac{M_x}{W_\rho}, \qquad (2.2)$$

где $M_x$ — крутящий момент; $W_\rho$ — полярный момент сопротивления круглого поперечного сечения.

При кручении образца за пределом применимости закона Гука касательные напряжения в поперечном сечении образца распределяются нелинейно (рис. 2.13).

Закон распределения касательных напряжений в этом случае устанавливается теорией пластичности. Наибольшие касательные напряжения при кручении сплошных цилиндрических образцов вычисляются по формуле Людвига — Кармана:

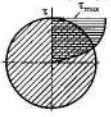



**Рис. 2.13.** Распределение касательных напряжений в поперечном сечении образца за пределом упругости

$$\tau_{max} = \frac{4}{\pi d_0^3}\left(3M_x + \frac{dM_x}{d\vartheta}\vartheta\right), \qquad (2.3)$$

Диаграмма сдвига материала строится по диаграмме кручения образца графическим способом. В выбранной точке $K$ диа-

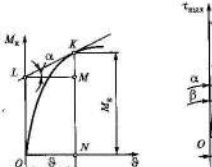



**Рис. 2.14.** Диаграмма кручения образца

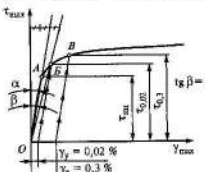



**Рис. 2.15.** Диаграмма сдвига материала

граммы кручения образца проводится касательная до пересечения с осью $M_к$ в точке $L$ (рис. 2.14). Это удобно делать с помощью зеркальной линейки. Затем из точки $L$ проводится горизонтальная прямая. Отрезок $KM = \vartheta \operatorname{tg}\alpha$ в масштабе для крутящего момента на диаграмме кручения соответствует $\frac{dM_z}{d\vartheta}$ в формуле Людвига — Кармана. Отрезок $KN$ в том же масштабе соответствует крутящему моменту $M_z$.

Ордината диаграммы сдвига $\tau_{max}$, полученная по формуле (2.3), должна быть отложена на этой диаграмме совместно с абсциссой $\gamma$, определяемой по формуле (2.1). Указанное построение повторяется для ряда точек диаграммы кручения образца, и по полученным значениям координат строится диаграмма сдвига материала (рис. 2.15).

Формулы (2.1) и (2.3) получены в предположении, что $\operatorname{tg}\gamma_{max} \approx \gamma_{max}$ и поэтому применимы только при небольших значениях удельных углов закручивания, не превышающих 1,0…1,5 град/мм, поэтому для образца с длиной рабочей части, равной 100 мм, диаграмма сдвига строится только до достижения углом закручивания $\vartheta$ значения 150°. Диаграмма сдвига материала зависит от его структуры, условий испытаний (температуры, скорости деформаций).





Начальный участок $OA$ диаграммы сдвига линейный, т. е. угол сдвига $\gamma$ пропорционален касательному напряжению $\tau$. Закон пропорциональности, называемый законом Гука при сдвиге, может быть записан следующим образом:

$$\tau = G\gamma,$$

где $G$ — коэффициент пропорциональности, называемый модулем сдвига или модулем упругости второго рода; он характеризует сопротивление материала упругим деформациям и является его упругой постоянной.

Закон Гука при сдвиге нарушается в точке $A$ диаграммы сдвига. Ордината этой точки имеет особое наименование — предел пропорциональности. Пределом пропорциональности $\tau_{пц}$ называется наибольшее напряжение, до достижения которого справедлив закон Гука при сдвиге. Для его практического определения вводится понятие условного предела пропорциональности. В этом случае принимают такое напряжение $\tau_{пц}$, при котором тангенс угла наклона касательной к диаграмме $\tau = f(\gamma)$ в 1,5 раза больше тангенса угла наклона линейного участка этой диаграммы. В приведенном определении для $\tau_{пц}$ речь идет об угле к оси напряжений (см. рис. 2.15).

При некотором превышении предела пропорциональности все деформации остаются упругими, т. е. обратимыми — полностью исчезающими при снижении напряжения до нуля.

Наибольшее напряжение, до достижения которого все деформации в материале упругие, называется пределом упругости $\tau_у$. На практике пользуются условным пределом упругости.

Условным пределом упругости $\tau_{0,02}$ называется напряжение, при котором пластическая (остаточная) деформация составляет 0,02 %. Для нахождения на диаграмме сдвига (см. рис. 2.15) точки $Б$, соответствующей пределу упругости, необходимо воспользоваться законами разгружения и повторного нагружения.

Основной механической характеристикой материала при сдвиге является предел текучести $\tau_т$. При этом напряжении мате-

риал начинает интенсивно пластически деформироваться. Пределом текучести (физическим) $\tau_т$ называется напряжение, при котором материал начинает интенсивно накапливать пластические деформации, причем этот процесс идет при почти постоянном напряжении. Физический предел текучести устанавливается в случае, если на диаграмме сдвига материала имеется площадка текучести. При отсутствии площадки текучести (что характерно для диаграмм сдвига большинства материалов) вводят понятие условного (технического) предела текучести. Условным пределом текучести $\tau_{0,3}$ называется напряжение, при котором пластическая деформация составляет 0,3 %. Условный предел текучести определяется аналогично пределу упругости (см. рис. 2.15).

Показанные на рис. 2.15 построения с целью определения $\tau_{пц}$, $\tau_{0,02}$, $\tau_{0,3}$ можно проводить на диаграмме $M_к \approx \vartheta$, которая является первичным результатом испытаний на кручение. С помощью диаграммы $M_к \approx \vartheta$ можно найти $M_{к.пц}$, $M_{к\,0,01}$, $M_{к\,0,3}$, т. е. крутящие моменты, соответствующие пределам пропорциональности, упругости и текучести.

Наибольшее касательное напряжение, соответствующее началу разрушения при чистом сдвиге, называется пределом прочности материала при сдвиге $\tau_в$. Это напряжение приближенно может быть определено по формуле (2.3), если в нее подставить значения $M_к$ и $\frac{dM_к}{d\vartheta}\vartheta$, соответствующие конечной точке $Д$ диаграммы кручения образца. Для весьма пластичного материала, деформирующегося при сдвиге без заметного упрочнения, можно считать $\frac{dM_к}{d\vartheta}=0$, в этом случае формула (2.3) преобразуется к виду $\tau_{вак}=\frac{12M_к}{\pi d_0^3}$ и позволяет найти предел прочности такого материала при сдвиге.





## 2.4. Определение упругих постоянных изотропного материала

Важнейшее свойство всех без исключения твердых тел — это упругость. Для огромного большинства материалов закон упругости с большой точностью может считаться линейным, с коэффициентом пропорциональности $E$, называемым модулем упругости [11]. Это закон Гука. Он справедлив, пока напряжение в материале не достигнет определенного предела, называемого пределом пропорциональности. Кроме модуля упругости механические свойства изотропных материалов характеризуются коэффициентом Пуассона.

В этой экспериментальной работе определяются упругие постоянные изотропных материалов методом тензометрии.

### Характеристика установки

В качестве объекта исследования используется стержень прямоугольного поперечного сечения, закрепленный в захватах испытательной машины (рис. 2.16) и нагруженный продольной силой $F$.

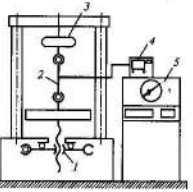



**Рис. 2.16.** Схема испытательной машины:

*1* — силовозбуждающее устройство; *2* — стержень; *3* — силоизмерительное устройство; *4* — электронный измеритель деформации; *5* — пульт управления

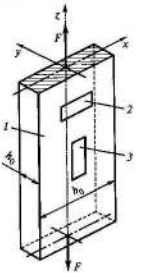



**Рис. 2.17.** Расположение тензорезисторов на стержне:
*1* — стержень; *2* — поперечный тензорезистор; *3* — продольный тензорезистор

На стержень до испытаний наклеиваются два тензорезистора (рис. 2.17): один в продольном направлении (для измерения продольной деформации $\varepsilon_z$), другой — в поперечном (для измерения поперечной деформации $\varepsilon_x$). Схема тензорезистора приведена на рис. 2.18.

Принципиальная схема подключения тензорезисторов к измерителю деформаций приведена на рис. 2.19. Температурная компенсация осуществляется включением в одно из плеч мостовой схемы (см. рис. 2.19) компенсационного тензорезистора $R_3$, который наклеен на брусок из того же материала, что и испытуемый стержень, но не нагружается в процессе испытаний.

Испытательная машина оснащена приспособлением для проведения градуировки измерителя деформаций (рис. 2.20, 2.21).

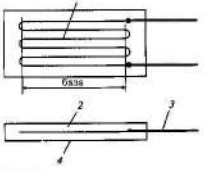



**Рис. 2.18.** Схема тензорезистора:
*1* — тензочувствительный элемент; *2* — крышка; *3* — выводные проводники; *4* — основа

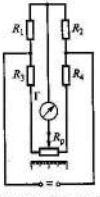



**Рис. 2.19.** Мостовая схема Уитстона:
Г — гальванометр





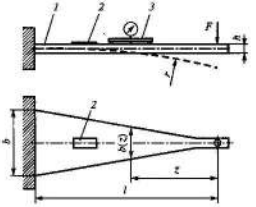



**Рис. 2.20.** Градуировочное приспособление:
*1* — балка; *2* — тензорезистор; *3* — прогибомер

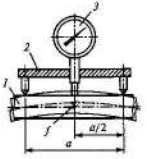



**Рис. 2.21.** Прогибомер:
*1* — балка; *2* — платформа; *3* — индикатор часового типа

### Краткие теоретические сведения

Закон Гука определяет пропорциональность между напряжениями и упругими деформациями:

$$\sigma_z = E\varepsilon_z, \tag{2.4}$$

где $E$ — модуль упругости первого рода.

Зависимость (2.4) справедлива до достижения напряжения $\sigma_{пц}$, называемого пределом пропорциональности материала.

При осевом нагружении стержня имеют место не только продольные ($\varepsilon_z$), но и поперечные ($\varepsilon_x$, $\varepsilon_y$) деформации.

При нагружении стержня до достижения предела пропорциональности материала отношение между поперечной и продольной деформациями оказывается постоянным. Абсолютное значение отношения поперечной деформации к продольной называется коэффициентом Пуассона или коэффициентом поперечной деформации:

$$\nu = \left|\frac{\varepsilon_{попер}}{\varepsilon_{прод}}\right| = \left|\frac{\varepsilon_x}{\varepsilon_z}\right|. \tag{2.5}$$

Модуль упругости и коэффициент Пуассона полностью определяют упругие свойства изотропного материала.

Упругие постоянные материала могут быть найдены экспериментально с помощью динамического и статического методов. В настоящее время считается, что динамический метод позволяет получать упругие постоянные с более высокой точностью, чем статический метод. Динамический метод основан на зависимости частоты колебаний стержня (резонансные методы) или скорости звука в нем (импульсные методы) от констант упругости. Статический метод предполагает плавное нагружение стержня с одновременным измерением продольной и поперечной деформаций.

Для измерения деформаций используются приборы, называемые тензометрами. Разработаны и применяются различные типы тензометров: механические, оптические, пневматические, электрические и др. [12]. Наибольшее распространение получили электрические тензометры. Их действие основано на изменении параметров электрической цепи тензометра (сопротивления, емкости или индуктивности) в соответствии с измеряемой деформацией. При выполнении этой работы используют электротензометры сопротивления, состоящие из двух частей: тензорезистора (см. рис. 2.18) и регистрирующего прибора (электронного измерителя деформаций).

Тензорезисторы прочно приклеиваются к внешней поверхности стержня. При деформировании стержня деформируются и тензорезисторы, вследствие чего изменяется их электрическое сопротивление.

Широко распространены проволочные и фольговые тензорезисторы. Тензочувствительные элементы проволочных тензорезисторов выполняются в виде петлеобразной решетки из тонкой проволоки (диаметр 0,01…0,03 мм), а тензочувствительные элементы фольговых тензорезисторов — из тонкой фольги (толщина 0,005…0,010 мм). Фольговые тензорезисторы по сравнению с проволочными имеют лучшие метрологические характеристики. В качестве материалов тензочувствительного элемента применяются: константан (58,5 % Cu, 40 % Ni, 1,5 % Mn), элинвар (36 % Ni, 8 % Cr, 56 % Fe), нихром (80 % Ni, 20 % Cr) и другие сплавы.





Конструктивно тензорезисторы (см. рис. 2.18) состоят из лаковой, бумажной или металлической основы, на которой с помощью клея укреплен тензочувствительный элемент. Тензорезистор присоединяется к измерителю деформации с помощью припаянных к нему выводных проводников.

Важной характеристикой тензорезистора является его база. В настоящее время применяются проволочные тензорезисторы с базой от 3 до 50 мм и фольговые тензорезисторы с базой от 0,3 до 100 мм. Использование тензорезисторов с той или иной базой связано с характером деформированного состояния стержня. Чем выше градиент изменения деформаций, тем меньше должна быть база применяемых тензорезисторов.

Измеритель деформации чаще всего собран по мостовой схеме (см. рис. 2.19). При использовании тензорезисторов важным является вопрос температурной компенсации, так как изменение температуры вызывает изменение электрического сопротивления тензорезистора. Температурная компенсация осуществляется компенсационным тензорезистором, включенным в соответствующее плечо мостовой схемы. Компенсационный тензорезистор приклеивается к свободному от нагрузки бруску из материала той же марки, что и материал стержня, и помещается в те же температурные условия, что и рабочий тензорезистор. Компенсационный тензорезистор выбирается из той же партии, что и рабочий.

### Градуировка электронного измерителя деформаций

Применяя электротензометр, необходимо знать цену деления шкалы измерителя деформаций. Процесс определения цены деления шкалы прибора называется его градуировкой. Она осуществляется с помощью специальных градуировочных приспособлений (см. рис. 2.20). При выполнении этой экспериментальной работы используется балка равного сопротивления изгибу, которая имеет переменное поперечное сечение и нагружается сосредоточенной силой вдоль линии пересечения на-

клонных граней. В этом случае упругая линия балки — дуга окружности, причем в клиновидной части балки деформации и напряжения вдоль ее оси постоянны.

Максимальные напряжения при изгибе балки

$$\sigma_z = \frac{M_x}{W_x},$$

где $M_x = Fz$; $W_x = \frac{b(z)h^2}{6}$; $b(z) = \frac{bz}{l}$; $M_x$ — изгибающий момент; $W_x$ — момент сопротивления сечения изгибу.

Тогда

$$\sigma_z = \frac{Fz}{\frac{bz}{6}\frac{h^2}{l}} = \frac{6Fl}{bh^2} = \text{const}, \qquad (2.6)$$

следовательно, в соответствии с законом Гука $\varepsilon_z = \text{const}$.

На верхнюю и нижнюю поверхности клиновидной части балки наклеиваются тензорезисторы, которые выбираются обязательно из той же партии, что и рабочие тензорезисторы, т. е. наклеенные на стержень.

При градуировке деформация $\varepsilon_z$ должна определяться двумя независимыми способами, например электротензометром и механическим прибором (прогибомером). Сопоставляя показание электротензометра со значением деформации, полученным при ее измерении механическим прибором, можно найти цену деления шкалы измерителя деформаций.

Найдем цену деления шкалы электротензометра. Деформацию $\varepsilon_z$ можно определить с помощью прогибомера, схема которого приведена на рис. 2.21. Прогибомер позволяет измерить стрелу прогиба $f$ балки на базе $a$. Необходимо найти зависимость стрелы прогиба $f$ от деформации $\varepsilon_z$ верхней поверхности балки (рис. 2.22 и 2.23).

Так как

$$\Delta ABC \approx \Delta BCD,$$





то

$$\frac{\frac{a}{2}}{\frac{f}{a}} = \frac{2}{2r - f}.$$

Прогиб $f$ мал, поэтому

$$2r - f \approx 2r,$$

следовательно,

$$f = \frac{a^2}{8r}, \quad \frac{1}{r} = \frac{8f}{a^2}. \qquad (2.7)$$

Определим радиус кривизны $r$ оси балки (см. рис. 2.23):

$$\varepsilon_z = \frac{\left(r + \frac{h}{2}\right)d\varphi - rd\varphi}{rd\varphi} = \frac{h}{2r},$$

$$\frac{1}{r} = \frac{2\varepsilon_z}{h}. \qquad (2.8)$$

Приравниваем (2.7) и (2.8)

$$\frac{8f}{a^2} = \frac{2\varepsilon_z}{h}$$

и получаем

$$\varepsilon_z = \frac{4fh}{a^2}. \qquad (2.9)$$

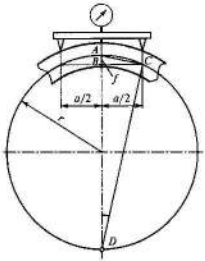



**Рис. 2.22.** Измерение кривизны балки

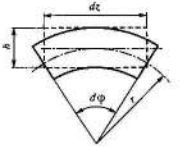



**Рис. 2.23.** Деформация элемента балки

Деформация $\varepsilon_z$, измеряемая электротензометром, составляет

$$\varepsilon_z = K_\varepsilon n_\varepsilon, \qquad (2.10)$$

где $K_\varepsilon$ — цена деления шкалы измерителя деформации; $n_\varepsilon$ — число делений шкалы измерителя деформации.

Приравнивая (2.9) и (2.10), получаем

$$K_\varepsilon = \frac{4fh}{n_2 a^2}. \qquad (2.11)$$

Формула (2.11) позволяет вычислить экспериментальные значения продольной и поперечной деформаций стержня и найти по формулам (2.4) и (2.5) модуль упругости и коэффициент Пуассона.

## 2.5. Определение модуля упругости второго рода

Модулем упругости второго рода (или модулем сдвига) называется коэффициент пропорциональности между касательным напряжением и угловой деформацией в законе Гука для чистого сдвига $\tau = G\gamma$. Эта величина является основной механической характеристикой материала в расчетах стержней на кручение.

### Характеристика установки

Напряженное состояние «чистый сдвиг» возникает в скручиваемой тонкостенной трубке.

Объектом исследований является тонкостенный трубчатый стержень. Он нагружается крутящим моментом с помощью рычага и грузов (рис. 2.24). К стержню прикрепляется угломер (рис. 2.25), измеряющий угол закручивания между сечениями $A$ и $B$ стержня, расстояние между которыми $l_0$.

### Краткие теоретические сведения

В пределах упругих деформаций взаимный угол поворота (угол закручивания) $\vartheta$ сечения $A$ относительно сечения $B$ (см. рис. 2.25) определяется формулой

$$\vartheta = \frac{M_x l_0}{GI_x}, \qquad (2.12)$$





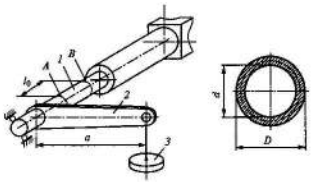



**Рис. 2.24.** Схема установки для испытаний на кручение:
*1* — стержень; *2* — рычаг; *3* — груз

где $M_x$ — крутящий момент в стержне на участке $AB$; $l_0$ — расстояние между сечениями $A$ и $B$, равное базе угломера; $I_x = I_p$ — полярный момент инерции сечения стержня (см. рис. 2.24).

Из формулы (2.12) получаем

$$G = \frac{M_x l_0}{\vartheta I_p}.$$

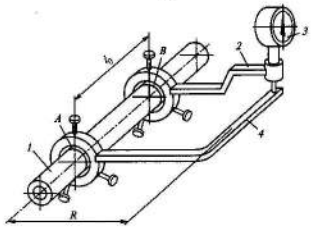



**Рис. 2.25.** Схема угломера:
*1* — стержень; *2* — кронштейн; *3* — индикатор часового типа; *4* — рычаг

При экспериментальном определении модуля упругости его находят по приращению угла закручивания $\Delta\vartheta$, которое происходит за счет приращения крутящего момента $\Delta M_к = \Delta F a$. Здесь $\Delta F$ — ступень увеличения нагрузки; $a$ — длина рычага.

Таким образом,

$$G = \frac{\Delta F a l_0}{\Delta\vartheta I_\rho}.$$

В процессе эксперимента нагружение стержня проводится ступенчато и на каждой ступени нагружения регистрируется приращение угла закручивания $\Delta\vartheta$. Модуль упругости $G$ вычисляется на основе среднего арифметического значения $\Delta\vartheta$.

# Глава 3
# Экспериментальное обоснование расчетных моделей механики деформируемого твердого тела

## 3.1. Исследование напряженного состояния при кручении стержня

Экспериментальное изучение напряженного состояния при кручении стержня, которое называется чистым сдвигом, осуществляется методом тензометрии. По измеренным деформациям определяются напряжения в соответствии с обобщенным законом Гука.

### Характеристика установки

Объектом исследования является тонкостенный стержень кольцевого поперечного сечения, нагружаемый крутящим моментом (рис. 3.1).

В сечении *I* стержня возникает напряженное состояние, называемое чистым сдвигом. Для измерения деформаций в произволь-

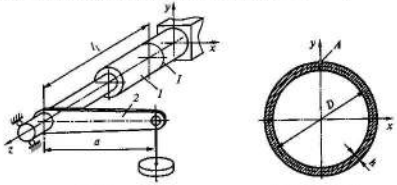



**Рис. 3.1.** Схема установки для испытаний на кручение:
*1* — стержень; *2* — рычаг

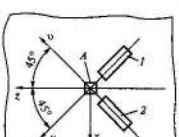



**Рис. 3.2.** Схема расположения тензорезисторов *1* и *2* в точке *A* сечения *1*

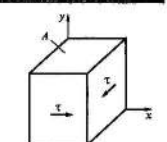



**Рис. 3.3.** Схема напряженного состояния в точке *A*

но выбранной точке *A* приклеены два тензорезистора, оси которых составляют 45° с продольной осью стержня (рис. 3.2).

### Краткие теоретические сведения

Чистым сдвигом называется такое плоское напряженное состояние, при котором по граням элемента действуют только касательные напряжения $\tau$ (рис. 3.3). Это напряженное состояние возникает в некоторых элементах конструкций при различных нагружениях. В частности, чистый сдвиг возникает при кручении тонкостенного стержня кольцевого поперечного сечения.

Касательное напряжение $\tau$ в этом случае вычисляется по формуле

$$\tau = \tau_{max} = \frac{M_x}{W_p},$$

где $M_x$ — крутящий момент в сечении стержня; $W_p = \dfrac{\pi D^2 h}{2}$ — полярный момент сопротивления сечения стержня кручению.

Деформации $\varepsilon_u$ и $\varepsilon_v$ в направлении осей $u$ и $v$ в точке $A$ измеряют с помощью тензорезисторов, затем по формулам обобщенного закона Гука вычисляют главные напряжения:





$$\sigma_u = \frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_u + \nu\varepsilon_v), \quad \sigma_v = \frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_v + \nu\varepsilon_u),$$
$$\sigma_1 = \sigma_u = \tau, \ \sigma_2 = 0, \ \sigma_3 = \sigma_v = -\tau,$$

где $\nu$ — коэффициент Пуассона.

При вычислении напряжений модуль упругости $E$ и коэффициент Пуассона $\nu$ считаются известными. В процессе эксперимента нагружение стержня производится ступенчато и на каждой ступени нагружения измеряются деформации $\varepsilon_u$ и $\varepsilon_v$. Для вычисления напряжений используют средние арифметические значения деформаций.

## 3.2. Прямой изгиб стержня

Одним из распространенных способов нагружения стержня является изгиб, который возникает, когда в поперечных сечениях стержня внутренние силы приводятся к изгибающему моменту [7]. При изгибе продольная ось стержня искривляется. Распределение внутренних сил по поперечному сечению изгибаемого стержня более сложное, чем при растяжении (сжатии). Экспериментальная проверка закона распределения нормальных напряжений в поперечном сечении стержня при чистом изгибе позволяет оценить справедливость допущений, принятых в технической теории изгиба стержня.

### Характеристика установки

Объектом исследования является стержень двутаврового поперечного сечения из алюминиевого сплава, установленный на двух опорах (рис. 3.4). Нагружение стержня осуществляется через динамометр.

Стержень между опорами динамометра находится в условиях чистого изгиба. В среднем сечении стержня наклеены семь тензорезисторов фольгового типа (рис. 3.5). Тензорезисторы расположены в направлении продольной оси $z$ и позволяют измерить деформацию $\varepsilon_z$ в соответствующих точках.

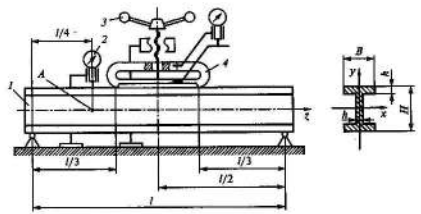



**Рис. 3.4.** Схема установки для испытаний на изгиб:
*1* — стержень; *2* — прогибомер; *3* — силовозбуждающее устройство; *4* — динамометр

Над одним из сечений стержня установлен прогибомер, представляющий собой индикатор часового типа, закрепленный на стойке. Установка комплектуется электронным измерителем деформаций.

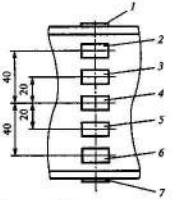



**Рис. 3.5.** Схема расположения тензорезисторов *1–7*

## Краткие теоретические сведения

Техническая теория чистого изгиба стержня основывается на следующих гипотезах:

– плоских сечений, согласно которой поперечные сечения стержня, плоские до деформирования, остаются плоскими и после деформирования;

– о ненадавливании продольных слоев друг на друга, т. е. продольные слои в стержне при чистом изгибе не взаимодействуют в нормальном по отношению к ним направлении, поэтому





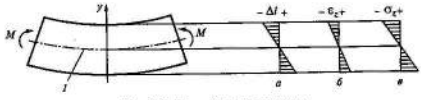



**Рис. 3.6.** Чистый изгиб стержня:
*1* — нейтральный слой

на площадках, параллельных оси стержня, нормальные напряжения равны нулю. Напряженное состояние при чистом изгибе стержня может считаться одноосным.

При изгибе стержня в нем образуются зона растяжения и зона сжатия. Границей между зонами растяжения и сжатия является продольный слой, называемый нейтральным. Этот слой искривляется, но его длина не изменяется.

На основании гипотезы плоских сечений можно сделать вывод о характере изменения длины продольных слоев. Эпюра удлинения $\Delta l$ линейная (рис. 3.6, *а*).

Линейной будет и эпюра относительных деформаций $\varepsilon_z$, так как длина всех волокон стержня до деформирования одинакова. Деформация продольного слоя $\varepsilon_z$ прямо пропорциональна его расстоянию от нейтрального слоя (рис. 3.6, *б*). Так как напряженное состояние одноосное, то

$$\sigma_z = E\varepsilon_z, \tag{3.1}$$

где $\sigma_z$ — нормальное напряжение в поперечном сечении стержня (рис. 3.6, *в*); $E$ — модуль упругости первого рода.

Соотношение (3.1) используется для определения экспериментальных значений нормальных напряжений.

Теоретические значения нормальных напряжений находят по формуле

$$\sigma_z = \frac{M_x}{I_x} y, \tag{3.2}$$

где $M_x$ — изгибающий момент относительно оси $x$; $I_x$ — осевой момент инерции сечения относительно оси $x$; $y$ — ордината точки, в которой определяют напряжение.

Значения нормальных напряжений (3.1) и (3.2) должны совпадать.

### Определение перемещения точки $A$

Определим перемещение точки $A$, используя универсальное уравнение упругой линии (метод Коши—Крылова) [7]. Этот метод позволяет ограничиться определением всего двух постоянных интегрирования. Расчетная схема стержня приведена на рис. 3.7.

Дифференциальное уравнение упругой линии имеет следующий вид:

$$EI_x v'' = M_x(z).$$

Уравнение $M_x(z)$ записываем для третьего участка стержня (см. рис. 3.7):

$$M_x(z) = +\frac{F}{2}z\Big|_0 - \frac{F}{2}\left(z-\frac{l}{3}\right)\Big|_2 - \frac{F}{2}\left(z-\frac{2}{3}l\right)\Big|_3,$$

$$EI_x v'' = +\frac{F}{2}z\Big|_0 - \frac{F}{2}\left(z-\frac{l}{3}\right)\Big|_2 - \frac{F}{2}\left(z-\frac{2}{3}l\right)\Big|_3,$$

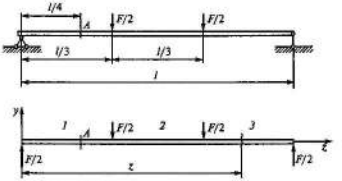



**Рис. 3.7.** Расчетная схема стержня:
*1–3* — номера участков





$$EI_x v' = C_1 + \frac{F}{2}\frac{z^2}{2}\Big|_0 - \frac{F}{2}\frac{\left(z-\frac{l}{3}\right)^2}{2}\Big|_2 - \frac{F}{2}\frac{\left(z-\frac{2}{3}l\right)^2}{2}\Big|_3,$$

$$EI_x v = C_2 + C_1 z + \frac{F}{2}\frac{z^3}{6}\Big|_0 - \frac{F}{2}\frac{\left(z-\frac{l}{3}\right)^3}{6}\Big|_2 - \frac{F}{2}\frac{\left(z-\frac{2}{3}l\right)^3}{6}\Big|_3.$$

Граничные условия:

1) $z=0,\ v=0,\ \Rightarrow C_2=0,$

2) $z=l,\ v=0.$

Тогда

$$0 = C_1 l + \frac{F}{12}\left(l^3 - \frac{8}{27}l^3 - \frac{1}{27}l^3\right),$$

$$C_1 = -\frac{Fl^2}{18}.$$

Уравнение упругой линии приобретает вид

$$v = \frac{F}{6EI_x}\left(-\frac{l^3}{3} + \frac{z^3}{2}\Big|_0 - \frac{\left(z-\frac{l}{3}\right)^3}{6}\Big|_2 - \frac{\left(z-\frac{2}{3}l\right)^3}{6}\Big|_3\right).$$

Перемещение точки $A$ $\left(z_A = \frac{l}{4}\right)$ составляет

$$v_A = \frac{F}{6EI_x}\left[-\frac{l^3}{3} + \frac{1}{2}\left(\frac{l}{4}\right)^3\right] = -0{,}0542\frac{Fl^3}{EI_x}.$$

Осевой момент инерции сечения равен

$$I_x = \frac{h(H-h)^2}{12}(H-h+6B),$$

где $H$, $B$, $h$ — размеры элементов поперечного сечения стержня.

Допущения, принятые в технической теории прямого чистого изгиба, позволяют получить высокоточную расчетную схему, поэтому несовпадение результатов эксперимента на должно превышать 3…5 %.

## 3.3. Косой изгиб стержня

При косом изгибе стержня плоскость действия изгибающего момента не проходит ни через одну из главных осей поперечного сечения стержня, поэтому его деформация не происходит в плоскости изгибающего момента. Исследование закона распределения нормальных напряжений по поперечному сечению стержня позволит подтвердить основные положения технической теории косого изгиба [7].

### Характеристика установки

Объектом исследования является консольно закрепленный стержень прямоугольного поперечного сечения, нагруженный вертикальной силой (рис. 3.8).

Конструкция опоры позволяет поворачивать стержень относительно его продольной оси и закреплять в установленной позиции. Положение стержня контролируется посредством угловой шкалы, нанесенной на подвижную часть опоры стержня.

Отсчет угла φ осуществляется от вертикали. На свободном конце стержня на цилиндрическом шарнире установлена подвеска, на которую укладываются грузы. Конструкция подвески позволяет прикладывать силу только вертикального направления.

В сечении стержня *1* наклеены в продольном направлении четыре тензорезистора типа ФКПА-10-100 (фольговые, база 10 мм, сопротивление 100 Ом) (рис. 3.9).





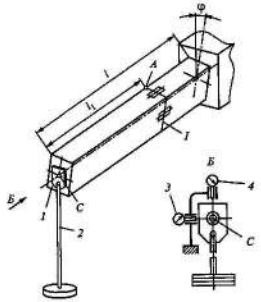



**Рис. 3.8.** Схема установки:
*1* — стержень; *2* — подвеска; *3* — горизонтальный прогибомер; *4* — вертикальный прогибомер

У свободного конца стержня на опорной плите стенда установлена стойка, на которой укреплены два индикатора часового типа. Индикаторы позволяют измерять горизонтальную и вертикальную составляющие полного перемещения точки $C$ (см. рис. 3.8). Установка комплектуется электронным измерителем деформаций.

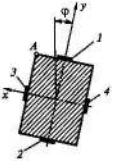



**Рис. 3.9.** Расположение тензорезисторов *1-4*

### Краткие теоретические сведения

Техническая теория косого поперечного изгиба стержня основывается на двух гипотезах: гипотезе плоских сечений и гипотезе о ненадавливании продольных слоев друг на

друга в направлениях, перпендикулярных к ним, т. е. на тех же гипотезах, что и теория чистого прямого изгиба.

Чистым косым изгибом стержня называется такой изгиб, при котором внутренние силы в поперечном сечении стержня приводятся только к изгибающему моменту, плоскость действия которого не содержит ни одну из главных центральных осей инерции поперечного сечения стержня при изгибе. Плоскость, в которой действует изгибающий момент, обычно называется силовой. В отличие от прямого изгиба изогнутая ось стержня не лежит в силовой плоскости, т. е. деформирование стержня при косом изгибе происходит не в плоскости изгибающего момента, а в плоскости, повернутой относительно силовой плоскости на некоторый угол в сторону плоскости наименьшей жесткости стержня при изгибе.

Так как гипотеза плоских сечений справедлива, то поперечное сечение поворачивается относительно нейтральной оси, оставаясь плоским. Нейтральная линия при косом изгибе не перпендикулярна силовой плоскости.

Косой изгиб рассматривается как одновременный изгиб в двух плоскостях $zx$ и $zy$, где оси $x$ и $y$ — главные центральные оси инерции поперечного сечения стержня. Для этого изгибающий момент $M$ раскладывается на составляющие относительно осей $x$ и $y$. Нормальное напряжение в точке поперечного сечения вычисляется как алгебраическая сумма напряжений, обусловленных моментами $M_x$ и $M_y$:

$$\sigma = \frac{M_x}{I_x} y + \frac{M_y}{I_y} x, \qquad (3.3)$$

где $M_x$, $M_y$ — изгибающие моменты относительно осей $x$, $y$; $I_x$, $I_y$ — осевые моменты инерции площади поперечного сечения стержня относительно осей $x$, $y$; $x$, $y$ — координаты точки.

Наибольшие напряжения возникают в точках сечения, наиболее удаленных от нейтральной линии.

При косом изгибе полное перемещение точки определяется как

$$f = \sqrt{u^2 + \upsilon^2}, \qquad (3.4)$$





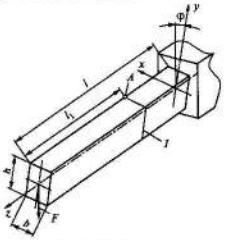



**Рис. 3.10.** Стержень

где $u$ — проекция полного перемещения точки на ось $x$; $\upsilon$ — проекция полного перемещения точки на ось $y$.

Рассмотрим косой изгиб стержня (рис. 3.10).

Изгибающий момент $M$ в сечении $I$ равен

$$M = Fl_I.$$

Составляющие этого момента на главные центральные оси инерции $x$ и $y$ (рис. 3.11):

$$M_x = M\cos\varphi = Fl_I\cos\varphi,$$
$$M_y = M\sin\varphi = Fl_I\sin\varphi.$$

Определим напряжение в точке $A\left(\frac{b}{2};\frac{h}{2}\right)$ по формуле (3.3):

$$\sigma_A = \frac{M_x}{I_x} y_A + \frac{M_y}{I_y} x_A = \frac{Fl_I\cos\varphi}{\frac{1}{12}bh^3}\frac{h}{2} +$$
$$+ \frac{Fl_I\sin\varphi}{\frac{1}{12}hb^3}\left(\frac{b}{2}\right) = \frac{6Fl_I}{bh}\left(\frac{\cos\varphi}{h} + \frac{\sin\varphi}{b}\right).$$

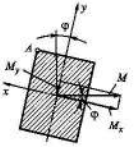



**Рис. 3.11.** Изгибающие моменты в сечении

Так как $h = 2b$, то

$$\sigma_A = \frac{3}{2}\frac{Fl}{b^3}(\cos\varphi + 2\sin\varphi).$$

Определим полное линейное перемещение точки $C$ (см. рис. 3.8).

Рассмотрим консольный брус длиной $l$ жесткостью $EI_x$, нагруженный на свободном конце силой $P$, в условиях прямого изгиба в плоскости $zy$ (рис. 3.12).

Для определения перемещения точки $K$ воспользуемся дифференциальным уравнением упругой линии:

$$\upsilon'' = \frac{M_x(z)}{EI_x}.$$

Изгибающий момент

$$M_x(z) = P(z - l),$$

Тогда

$$\upsilon'' = \frac{P(z-l)}{EI_x}. \qquad (3.5)$$

Проинтегрируем полученное дифференциальное уравнение (3.5):

$$\upsilon' = \frac{P}{EI_x}\left(\frac{z^2}{2} - lz\right) + C_1,$$

$$\upsilon = \frac{P}{EI_x}\left(\frac{z^3}{6} - \frac{lz^2}{2}\right) + C_1 z + C_2.$$




**Рис. 3.12.** Прямой изгиб стержня в плоскости $zy$





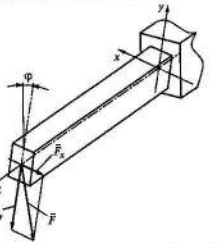



**Рис. 3.13.** Составляющие внешней силы $F$

Граничные условия:

1) $z = 0, \upsilon = 0 \Rightarrow C_2 = 0,$

2) $z = 0, \upsilon' = 0 \Rightarrow C_1 = 0.$

Окончательно получаем

$$\upsilon = \frac{P}{2EI_x}\left(\frac{z^3}{3} - lz^2\right).$$

Полагая $z_A = l$, получаем $\upsilon_A = -\frac{Pl^3}{3EI_x}$.

Рассмотрим стержень, используемый в этой экспериментальной работе (рис. 3.13).

Проекции полного перемещения точки $C$ (см. рис. 3.8) на оси $x$ и $y$

$$u_C = -\frac{1}{3}\frac{Fl^3\sin\varphi}{EI_y}, \quad \upsilon_C = -\frac{1}{3}\frac{Fl^3\cos\varphi}{EI_x}.$$

Полное перемещение точки $C$ стержня определяется по формуле (3.4):

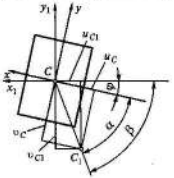


**Рис. 3.14.** Перемещение точки $C$

$$f_C = \sqrt{u_C^2 + v_C^2} = \frac{1}{3}\frac{Fl^3}{E}\sqrt{\frac{\sin^2\varphi}{I_y^2} + \frac{\cos^2\varphi}{I_x^2}}.$$

Угол наклона $\alpha$ перемещения точки $C$ к оси $x$ (рис. 3.14)

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{|v_C|}{|u_C|} = \frac{I_x}{I_y}\operatorname{ctg}\varphi,$$

откуда $\alpha = \operatorname{arctg}\left(\frac{I_y}{I_x}\operatorname{ctg}\varphi\right)$.

Экспериментально возможно оценить наиболее неблагоприятное расположение стержня относительно опоры, т. е. найти значение угла $\varphi$, при котором в стержне возникает максимальное нормальное напряжение.

## 3.4. Проверка принципа независимости действия сил

Принцип независимости действия сил относится к основополагающим принципам механики деформируемого твердого тела, поэтому его экспериментальное подтверждение имеет важное значение.

### Характеристика установки

Объектом исследования является стержень прямоугольного поперечного сечения. Стержень установлен на двух шарнирных опорах, из которых одна подвижная, другая неподвижная (рис. 3.15). В сечениях $A$ и $C$ имеются подвески, на которые укладываются гири. В сечении $B$ установлен прогибомер, в сечении $A$ — угломер.

### Краткие теоретические сведения

При анализе выбранной расчетной схемы принимаются допущения, которые имеют разную степень общности. Если эти допущения носят общий характер и лежат в основе решения подавляющего большинства задач, они называются принципами.





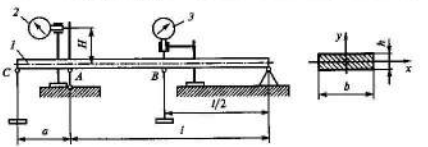


**Рис. 3.15.** Схема установки:
*1* — стержень; *2* — угломер; *3* — прогибомер

Принцип есть основополагающее недоказуемое в общем виде утверждение, отличающееся от аксиомы своей общностью. В сопротивлении материалов есть три таких принципа: принцип относительной жесткости систем, принцип суперпозиции (независимости действия сил) и принцип Сен-Венана [7].

Первый принцип основан на том, что в большинстве случаев форма тела под действием внешних сил меняется несущественно. Это позволяет при составлении уравнений равновесия рассматривать тело как недеформированное, имеющее те же геометрические размеры, какие оно имело до нагружения. Этот принцип обычно называют принципом отверждения или принципом неизменности начальных размеров. Системы, для которых справедлив принцип неизменности начальных размеров, называются геометрически линейными.

Чтобы система была линейно деформируемой, необходимо выполнение для материала этой системы закона Гука. Системы, для которых это условие справедливо, называются физически линейными.

Системы, для которых соблюдаются свойства физической и геометрической линейности, называются линейно деформируемыми. В них внутренние силы, напряжения, деформации и перемещения пропорциональны действующим внешним силам.

Системы, в которых выполняется условие пропорциональности между перемещениями и внешними силами, подчиняются второму принципу — принципу суперпозиции, или независимости действия сил. В соответствии с этим принципом перемещения, напряжения и деформации нагруженного тела считаются независящими от порядка приложения сил; действие суммы сил равняется сумме их действий.

В качестве линейно деформируемого тела рассмотрим изгибаемый стержень. Предположим, что к стержню приложена только сила $F_1$. Угловое перемещение сечения $A$ пропорционально силе $F_1$:

$$\theta_{A1} = \delta_{A1} F_1, \tag{3.6}$$

линейное перемещение сечения $B$ также пропорционально силе $F_1$:

$$\upsilon_{B1} = \delta_{B1} F_1. \tag{3.7}$$

Пропорциональность этих перемещений следует из свойств линейно деформируемого тела.

Предположим, что сила $F_1$ снята и в точке $B$ приложена только сила $F_2$. Угловое перемещение сечения $A$, вызываемое силой $F_2$, будет

$$\theta_{A2} = \delta_{A2} F_2.$$

Линейное перемещение сечения $B$

$$\upsilon_{B2} = \delta_{B2} F_2.$$

Коэффициенты пропорциональности в приведенных равенствах неодинаковы, поскольку силы $F_1$ и $F_2$ приложены в разных точках стержня.

Считается, что принятая линейная зависимость между перемещениями и силами сохраняется как при возрастании, так и при убывании сил и предопределяет линейно упругие свойства рассматриваемого тела.

Рассмотрим теперь совместное действие сил $F_1$ и $F_2$. Приложим к стержню силу $F_1$, а затем, не снимая ее, силу $F_2$, тогда угловое перемещение сечения $A$





$$\theta_A = \delta_{A1} F_1 + \delta^*_{A2} F_2, \tag{3.8}$$

линейное перемещение сечения $B$

$$\upsilon_B = \delta_{B1} F_1 + \delta^*_{B2} F_2. \tag{3.9}$$

Коэффициенты $\delta_{A1}$ и $\delta_{B1}$ совпадут с коэффициентами формул (3.6) и (3.7), так как сила $F_1$ прикладывалась к ненагруженному стержню. Коэффициенты $\delta^*_{A2}$ и $\delta^*_{B2}$ в отличие от коэффициентов $\delta_{A2}$ и $\delta_{B2}$ отмечены знаком «*», так как сила $F_2$ прикладывалась к стержню, нагруженному силой $F_1$.

Если предположить, что коэффициенты $\delta_{A2}$ и $\delta^*_{A2}$, $\delta_{B2}$ и $\delta^*_{B2}$ различны, то следует признать, что коэффициенты $\delta^*_{A2}$ и $\delta^*_{B2}$ зависят от силы $F_1$. Тогда (3.8) и (3.9) противоречат основному предположению о том, что при любых силах перемещения зависят от действующих сил линейно. Следовательно, $\delta^*_{A2}$ и $\delta^*_{B2}$ от силы $F_1$ не зависят. При $F_1 = 0$ (3.8) и (3.9) должны переходить в (3.6) и (3.7) соответственно. Следовательно,

$$\delta^*_{A2} = \delta_{A2}, \quad \delta^*_{B2} = \delta_{B2}, \tag{3.10}$$

тогда

$$\upsilon_B = \delta_{B1} F_1 + \delta_{B2} F_2. \tag{3.11}$$

Таким образом, перемещения определяются суммой результатов независимых действий сил $F_1$ и $F_2$. При изменении порядка приложения сил $F_1$ и $F_2$, опираясь на приведенные рассуждения, легко прийти к (3.10) и (3.11). Следовательно, результат действия сил не зависит от порядка их приложения. Вывод о нагружении двумя силами легко обобщается на случай любого числа сил.

Итак, в основе принципа независимости действия сил лежит предположение о линейной зависимости между перемещениями и силами и, кроме того, предположение об обратимости процессов нагружения и разгружения.

Принцип независимости действия сил широко используется в механике деформируемого твердого тела (в сопротивлении материалов) для решения широкого круга задач. На основе этого принципа можно доказать некоторые важные теоремы механики деформируемого твердого тела (теорему Бетти, теоремы Кастилиано и др.).

Теоретический расчет углового перемещения сечения $A$ и линейного перемещения сечения $B$ проводится для трех случаев нагружения «$F_1 + F_2$», «$F_1$» и «$F_2$» методом Мора (правило Верещагина).

## 3.5. Исследование статически неопределимого стержня при изгибе

Многие конструкции являются статически неопределимыми, т. е. такими, в которых невозможно найти усилия с помощью только уравнений равновесия, так как число неизвестных, подлежащих определению, превышает число уравнений статики.

Для решения таких задач необходимо использовать уравнения, описывающие деформации исследуемой системы. Разработано несколько методов решения статически неопределимых задач, наиболее распространенным является метод сил. Экспериментальное подтверждение этого метода имеет важное значение.

### Характеристика установки

Объектом исследования является стержень прямоугольного поперечного сечения. Стержень установлен на три опоры, которые обеспечивают наложение четырех связей (рис. 3.16). Средняя опора (в сечении $C$) имеет конструкцию, позволяющую измерить ее реакцию. Принцип действия этой опоры понятен из рис. 3.16. Грузы *8*, закрепленные на винте *7*, могут перемещаться вдоль шкалы *5* при вращении винта. Расположение грузов относительно их исходного





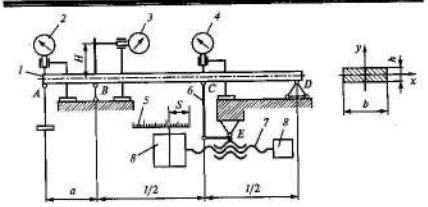



**Рис. 3.16.** Схема установки:
*1* — стержень; *2, 4* — прогибомеры; *3* — угломер; *5* — шкала; *6* — тяга; *7* — винт; *8* — грузы

положения устанавливается посредством шкалы *5*, укрепленной параллельно оси винта. Грузы *8* создают относительно точки $E$ момент, который преобразуется посредством рычажной системы и тяги *6* в силу, действующую на стержень. Эта сила имитирует реакцию связи в сечении $C$ стержня. Для контроля положения сечения $C$ используется прогибомер *4* — индикатор часового типа, закрепленный на стойке. Аналогичные приборы используются для измерения линейного и углового перемещений сечений $A$ и $B$ стержня.

### Краткие теоретические сведения

Статически неопределимой называется такая система, в которой усилия не могут быть определены только из уравнений статики. Разность между числом неизвестных (реакций связей и внутренних сил) и числом независимых уравнений статики называется степенью статической неопределимости. Число связей, при которых достигается кинематическая неизменяемость системы, носит название необходимого числа связей. Всякую связь, наложенную сверх необходимых, называют дополнительной. Число дополнительных связей равно степени статической неопределимости.

Для раскрытия статической неопределимости стержневых систем широко используется метод сил, идея которого заключается в том, что заданная статически неопределимая система освобождается от дополнительных связей (как внешних, так и внутренних), а их действие заменяется силами и моментами. Значения этих сил и моментов подбираются так, чтобы перемещения соответствовали тем ограничениям, которые накладываются на систему с отброшенными связями. Таким образом, при этом способе раскрытия статической неопределимости неизвестными являются силы [7].

Раскрытие статической неопределимости системы начинают с отбрасывания дополнительных связей. Система, освобожденная от внешних сил и дополнительных связей, называется основной. Она должна быть статически определимой и кинематически неизменяемой. Затем к основной системе нужно вместо отброшенных связей приложить неизвестные силы и моменты. В сечениях, в которых запрещены линейные перемещения, вводятся силы, а в сечениях, в которых запрещены угловые перемещения, вводятся моменты. Неизвестные силовые факторы обозначаются $X_i$, где $i$ — номер неизвестного. Наибольшее значение $i$ равно степени статической неопределимости. При снятии внутренних связей прикладываются взаимные силы и моменты.

Определение неизвестных силовых факторов осуществляется с помощью канонических уравнений метода сил. Смысл этих уравнений заключается в отсутствии перемещений в направлении отброшенных дополнительных связей. Число этих уравнений соответствует степени статической неопределимости рассматриваемой задачи.

Для $n$ раз статически неопределимой стержневой системы канонические уравнения записываются следующим образом:

$$\begin{aligned}
&\delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \ldots + \delta_{1n}X_n + \delta_{1F} = 0,\\
&\delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \ldots + \delta_{2n}X_n + \delta_{2F} = 0,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\delta_{n1}X_1 + \delta_{n2}X_2 + \ldots + \delta_{nn}X_n + \delta_{nF} = 0,
\end{aligned}$$





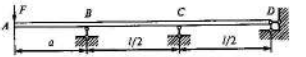



**Рис. 3.17.** Расчетная схема стержня




**Рис. 3.18.** Основная система

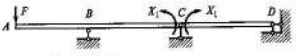



**Рис. 3.19.** Эквивалентная система

где $\delta_{ij}$ — перемещение в направлении $i$-го силового фактора от действия $j$-го силового фактора, равного 1.

Для определения $\delta_{ij}$ используют интеграл Мора или, если возможно, правило Верещагина.

Рассмотрим статически неопределимый стержень (рис. 3.17).

Стержень один раз статически неопределим, поэтому каноническое уравнение имеет вид

$$\delta_{11}X_1 + \delta_{1F} = 0.$$

Выбираем основную систему, считая дополнительной внутреннюю связь в сечении $C$ (рис. 3.18).

Эквивалентная система показана на рис. 3.19.

Строим эпюры изгибающих моментов $M_{zF}$ и $M_{z1}$ (рис. 3.20).

Определяем коэффициенты $\delta_{11}$ и $\delta_{1F}$ канонического уравнения, используя правило Верещагина:

$$\delta_{11} = \frac{2}{EI_z}\left(\frac{1}{2}\cdot 1\cdot\frac{l}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot 1\right) = \frac{1}{3}\frac{l}{EI_z},$$

$$\delta_{1F} = \frac{1}{EI_z}\left(-\frac{1}{2}Fa\cdot\frac{l}{2}\cdot\frac{1}{3}\right) = -\frac{1}{12}\frac{Fal}{EI_z}.$$

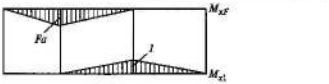



**Рис. 3.20.** Эпюры изгибающих моментов $M_{xF}$ и $M_{x1}$

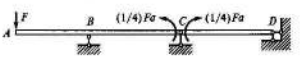



**Рис. 3.21.** Эквивалентная система после определения $X_1$

Решаем каноническое уравнение относительно $X_1$:

$$X_1 = -\frac{\delta_{1F}}{\delta_{11}} = -\frac{\frac{1}{12}\frac{Fal}{EI_x}}{\frac{1}{3}\frac{l}{EI_x}} = \frac{1}{4}Fa.$$

Рассмотрев уравнения равновесия двухопорных стержней $AC$ и $CD$, определяем реакции внешних связей $R_B, R_C, R_D$ (рис. 3.21):

$$R_B = F\left(\frac{5}{2}\frac{a}{l}+1\right), \quad R_C = 3F\frac{a}{l}, \quad R_D = \frac{F}{2}\frac{a}{2}.$$

Эпюра изгибающих моментов $M_x$ показана на рис. 3.22.

Перемещения в статически неопределимых системах определяются в основной системе, поскольку при использовании заданной системы нужно вновь раскрыть статическую неопределимость от единичного фактора, приложенного в направлении искомого перемещения.

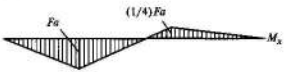



**Рис. 3.22.** Эпюра изгибающих моментов $M_x$





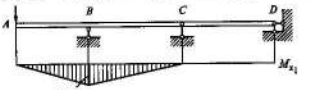



**Рис. 3.23.** Эпюра изгибающих моментов $M_{x1}$ при нагружении единичной силой

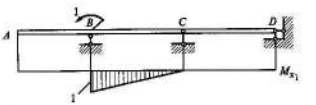



**Рис. 3.24.** Эпюра изгибающих моментов $M_{x1}$ при нагружении единичным моментом

Вычислим величину линейного перемещения $\upsilon_A$ сечения $A$. Для этого прикладываем единичную силу в сечение $A$, строим эпюру (рис. 3.23) и умножаем ее на эпюру $M_x$ по правилу Верещагина:

$$\upsilon_A = \frac{1}{EI_x}\left(\frac{1}{2}Faa\frac{2}{3}a + \frac{1}{2}Fa\frac{l}{2}\frac{2}{3}a - \frac{1}{2}\frac{Fa}{4}\frac{l}{2}\frac{1}{3}a\right) =$$
$$= \frac{Fa^2}{3EI_x}\left(a + \frac{7}{26}l\right).$$

Аналогично определяем угловое перемещение $\theta_B$ сечения $B$ (рис. 3.24):

$$\theta_B = \frac{1}{EI_x}\left(\frac{1}{2}Fa\frac{l}{2}\frac{2}{3} - \frac{1}{2}\frac{1}{4}Fa\frac{l}{2}\frac{1}{3}\right) = \frac{7}{48}\frac{Fal}{EI_x}.$$

Несовпадение результатов эксперимента с расчетом не должно превышать 3…5 %.

## 3.6. Определение напряжений и перемещений в плоской раме

Широкое распространение находят стержневые конструкции в виде плоских рам, элементы которых работают в основном на изгиб. Исследование статически определимых и статически неопределимых стержневых конструкций позволяет установить влияние дополнительных связей на распределение внутренних сил и сделать заключение о целесообразности введения этих связей.

### Характеристика установки

Объектом исследования является плоская рама, состоящая из трех жестко скрепленных между собой стержней прямоугольного поперечного сечения. Рама *4* установлена на двух шарнирных опорах, накладывающих на раму три связи (рис. 3.25). Конструкция опоры *A* позволяет наложить дополнительно горизонтальную связь, т. е. осуществить переход к статически неопределимой плоской раме. Кинематическая схема опоры *A* показана на рис. 3.25. Грузы *3*, неподвижно закрепленные на винте *2*, могут перемещаться при вращении винта вдоль его оси. Шкала *1*, закрепленная параллельно оси винта, указывает расположение грузов относительно их исходного положения. Момент, создаваемый грузами *3* относительно оси вращения рычажной системы, преобразуется этой системой в горизонтальное усилие, действующее на раму в опоре *A*. Для измерения горизонтального перемещения опоры *A* используется прогибомер — индикатор часового типа, закрепленный на кронштейне.

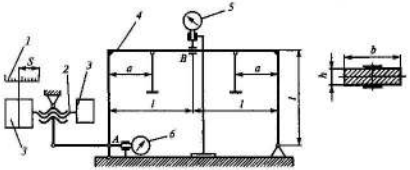



**Рис. 3.25.** Схема установки:
*1* — шкала; *2* — винт; *3* — грузы; *4* — рама; *5*, *6* — прогибомеры





В сечении *B* рамы наклеены два тензорезистора типа ФКПА-10-100 (фольговые, база 10 мм, сопротивление 100 Ом), которые служат для измерения деформаций в этом сечении рамы.

Тензорезисторы соединены с электронным измерителем деформаций.

Нагружение рамы осуществляется гирями.

### Краткие теоретические сведения

Статически определимая плоская рама (рис. 3.26) состоит из трех жестко связанных между собой стержней, геометрические оси которых лежат в одной плоскости. В этой же плоскости наложены связи и действуют внешние силы.

В поперечных сечениях рамы возникают изгибающий момент, поперечные и нормальные силы. Влиянием поперечных и нормальных сил на прочность и жесткость рамы пренебрегаем и учитываем только изгибающие моменты.

Нормальное напряжение в поперечном сечении вычисляется по формуле

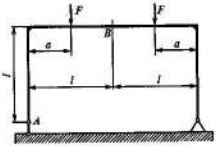



**Рис. 3.26.** Расчетная схема статически определимой плоской рамы

$$\sigma_z = \frac{M_x}{I_x} y.$$

Построим эпюру изгибающих моментов $M_x$ и вычислим максимальное нормальное напряжение в сечении $B$ рамы:

$$\sigma_{max} = \frac{M_x}{W_x}, \quad W_x = \frac{bh^2}{6},$$

$$\sigma_{max} = \frac{6M_x}{bh^2} = \frac{6Fa}{bh^2}.$$

Вычислим горизонтальное перемещение сечения $A$, используя правило Верещагина:

$$\delta_A = \frac{Fal}{EI_x}(2l - a),$$

где $I_x = \frac{bh^3}{12}$ — осевой момент инерции поперечного сечения.

Определим линейное вертикальное перемещение сечения $B$:

$$\delta_B = \frac{Fa}{2EI_x}\left(l^2 - \frac{a^2}{3}\right).$$

Статически неопределимую плоскую раму получаем путем наложения дополнительной горизонтальной связи в сечении $A$ (рис. 3.27).

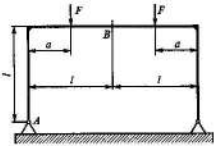



**Рис. 3.27.** Расчетная схема статически неопределимой плоской рамы





Раскрытие статической неопределимости плоской рамы осуществлено методом сил.

Каноническое уравнение метода сил

$$\delta_{11} X_1 + \delta_{1F} = 0.$$

Коэффициенты канонического уравнения определяем по правилу Верещагина:

$$\delta_{11} = \frac{8}{3}\frac{l^3}{EI_x},$$

$$\delta_{1F} = \frac{Fal}{EI_x}(2l - a),$$

$$X_1 = \frac{\delta_{1F}}{\delta_{11}} = -\frac{3}{8}\frac{Fa(2l - a)}{l^2}.$$

Эпюра изгибающих моментов статически неопределимой плоской рамы показана на рис. 3.28.

Максимальное нормальное напряжение в сечении $B$ рамы равно

$$\sigma_{max} = \frac{6Fa}{bh^2}\left(\frac{1}{4} + \frac{3a}{8l}\right).$$

Подсчитаем отношение максимальных напряжений в сечении $B$ для статически определимой и статически неопределимой плоских рам, характеризующее влияние дополнительной связи в сечении $A$ на напряженно-деформированное состояние:

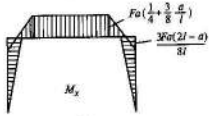



**Рис. 3.28.** Эпюра изгибающего момента для статически неопределимой плоской рамы

$$\frac{\sigma_{\text{max ст опор}}}{\sigma_{\text{max ст.неопор}}} = \frac{1}{\frac{1}{4}+\frac{3}{8}\frac{a}{l}}.$$

Определим линейное вертикальное перемещение сечения $B$ рамы:

$$\delta_B = \frac{Fa}{2EI_x}\left(\frac{l^2}{4}+\frac{3}{8}la-\frac{a^2}{3}\right).$$

Отметим, что введение дополнительной связи существенно уменьшает уровень максимальных напряжений и деформаций и, следовательно, дает возможность создавать менее металлоемкие конструкции (при прочих равных условиях).

## 3.7. Экспериментальная проверка теоремы о взаимности работ

Теорема о взаимности работ относится к основным теоремам механики деформируемого твердого тела, с применением которой решаются задачи.

Экспериментальное подтверждение этой теоремы имеет важное значение.

### Характеристика установки

Объектом исследования является плоская рама, состоящая из трех жестко соединенных между собой стержней прямоугольного поперечного сечения. Рама *1* установлена на двух шарнирных опорах (рис. 3.29). Конструкция опоры *A* позволяет приложить в сечении *A* нагрузку в виде сосредоточенного момента. Это достигается путем смещения грузов *4*, закрепленных на винте *5* при его вращении. Шкала *6*, установленная на опоре *A* параллельно оси винта, указывает расположение грузов относительно их исходного положения, при котором момент равен нулю.





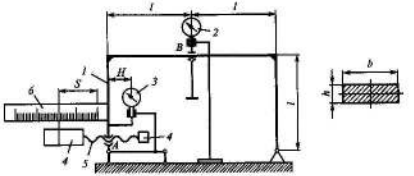



**Рис. 3.29.** Схема установки:
*1* — рама; *2* — прогибомер; *3* — угломер; *4* — грузы; *5* — винт; 6 — шкала

Для измерения прогиба в сечении $B$ и угла поворота сечения $A$ используются прогибомер *2* и угломер *3*.

Нагружение рамы осуществляется гирями.

### Краткие теоретические сведения

Теорема о взаимности работ была доказана итальянским ученым Э. Бетти в 1872 г. Согласно теореме Бетти, работа сил первого состояния на соответствующих им перемещениях второго состояния равна работе сил второго состояния на соответствующих им перемещениях первого состояния.

В соответствии с формулировкой теоремы можно записать

$$F_1\delta_{12} = F_2\delta_{21},$$

где $F_1$ — сила первого состояния; $F_2$ — сила второго состояния; $\delta_{12}$ — перемещения во втором состоянии, соответствующие силам первого состояния; $\delta_{21}$ — перемещения в первом состоянии, соответствующие силам второго состояния.

Теорема Бетти справедлива для линейных систем, в которых перемещения малы по сравнению с габаритными размерами, и для материала системы справедлив закон Гука.

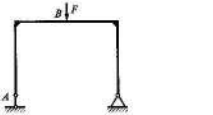



**Рис. 3.30.** Рама в первом состоянии

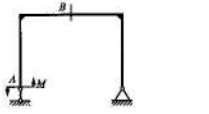



**Рис. 3.31.** Рама во втором состоянии

В качестве линейной системы в экспериментальной работе используется стержневая система — плоская рама, находящаяся последовательно в двух состояниях. Первое состояние характеризуется нагружением рамы силой $F$, приложенной в точке $B$ (рис. 3.30), второе состояние — нагружением рамы моментом $M$, приложенным в точке $A$ (рис. 3.31). В первом состоянии сечение $A$ поворачивается на угол $\theta_{A1}$, который соответствует моменту $M$ во втором состоянии. Во втором состоянии сечение $B$ получает перемещение $f_{B2}$, которое соответствует силе $F$ в первом состоянии.

Работа силы $F$ на перемещении $f_{B2}$ равна

$$A_{21} = Ff_{B2}.$$

Работа момента $M$ на перемещении $\theta_{A1}$ равна

$$A_{12} = M\theta_{A1}.$$

Согласно теореме о взаимности работ,

$$Ff_{B2} = M\theta_{A1}.$$

Теоретические значения перемещений $f_{B2}$ и $\theta_{A1}$ находятся методом Мора (правилу Верещагина).





## 3.8. Исследование напряжений в плоском стержне большой кривизны при внецентренном растяжении

Стержни большой кривизны часто встречаются в различных конструкциях (грузоподъемные крюки, проушины, звенья цепей) [7].

Приближенное решение задачи изгиба стержня большой кривизны на основе гипотезы плоских сечений было дано Э. Винклером в 1858 г. [2] и позднее, в 1868 г., независимо от него А. Евневичем. Это решение упростил в 1872 г. И.А. Вышнеградский, предложивший не учитывать поперечную силу. В курсах сопротивления материалов в несколько измененной форме излагается его решение.

В экспериментальной работе проводится сравнение результатов эксперимента и расчета стержня большой кривизны при его внецентренном растяжении или сжатии.

### Характеристика установки

Объектом исследования является плоский стержень большой кривизны прямоугольного поперечного сечения. Стержень неподвижно закреплен на опорной плите лабораторного стенда (рис. 3.32).

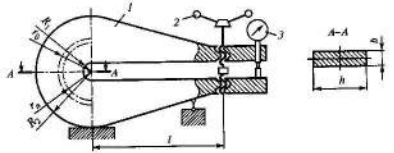



**Рис. 3.32.** Схема установки:
*1* — стержень; *2* — нагружающее устройство; *3* — силоизмеритель

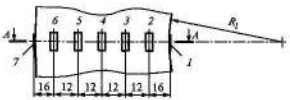



**Рис. 3.33.** Схема расположения тензорезисторов *1–7*

Нагружение стержня осуществляется посредством винта, имеющего правую и левую резьбы. Вращением винта в том или ином направлении осуществляют внецентренное растяжение или сжатие стержня.

Сила $F$, создаваемая винтом, определяется с помощью индикатора часового типа и градуировочного графика.

Индикатор, установленный на кривом стержне, измеряет расхождение (при внецентренном растяжении) или сближение (при внецентренном сжатии) концов кривого стержня. Таким образом, кривой стержень является силоизмерителем (динамометром).

В поперечном сечении *А–А* стержня (рис. 3.33) наклеены семь тензорезисторов типа ФКПА-10-100 (фольговые, база 10 мм, сопротивление 100 Ом), необходимые для измерения деформаций и определения нормальных напряжений.

Компенсационный тензорезистор наклеен на специальную недеформируемую в процессе испытаний пластинку, расположенную вблизи рабочих тензорезисторов. Тензорезисторы подключены к электронному измерителю деформаций.

### Краткие теоретические сведения

Кривые стержни подразделяют на стержни малой кривизны и стержни большой кривизны. Основным критерием такого разделения является отношение высоты $h$ поперечного сечения в плоскости кривизны к радиусу $r_0$ кривизны геометрической оси стержня. Если отношение $\frac{h}{r_0} \leqslant \frac{1}{5}$, стержень считается стержнем малой кривизны и для его расчета используется теория изгиба прямого стержня. Если отношение $\frac{h}{r_0} \geqslant \frac{1}{5}$, стержень считается стержнем большой кривизны и для его расчета используется теория изгиба, специально разработанная для стержня такого типа.

Теория изгиба стержня большой кривизны, изучаемая в курсе «Сопротивление материалов», основывается на гипотезе плоских сечений и гипотезе о ненадавливании продольных слоев друг на друга.

Рассмотрим чистый изгиб стержня в плоскости его кривизны. Под действием моментов $M$ (рис. 3.34, *а*) периферийная область стержня растягивается, область стержня, расположенная ближе к центру кривизны, сжимается (изгибающий момент $M$ традиционно считается положительным, если он увеличивает кривизну стержня); следовательно, имеется слой, который является границей между растягиваемой и сжимаемой областями стержня. Этот слой, как известно, называется нейтральным.

Покажем, что при чистом изгибе стержня большой кривизны нейтральный слой не содержит геометрическую ось стержня. Допустим обратное — нейтральный слой содержит геометрическую ось стержня. Тогда, согласно гипотезе плоских сечений, эпюра изменения длины $\Delta l$ продольных слоев стержня в результате деформирования является линейной (рис. 3.34, *б*). Линейная деформация $\varepsilon$ продольного слоя стержня

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l},$$

где $l$ — длина соответствующего слоя до деформирования.

Длина $l$ слоя кривого стержня в отличие от длины прямого стержня зависит от расстояния этого слоя до центра кривизны, поэтому эпюра линейных деформаций $\varepsilon$ имеет вид гиперболы (рис. 3.34, *в*). Следовательно, эпюра нормальных напряжений $\sigma = E\varepsilon$ будет представлена также гиперболой (рис. 3.34, *г*). Напряженное

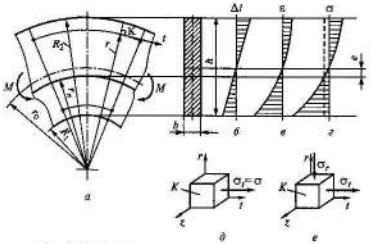



**Рис. 3.34.** Изгиб стержня в плоскости его кривизны

состояние в точке кривого стержня на основании гипотезы о ненадавливании продольных слоев друг на друга принимается одноосным (рис. 3.34, *д*). Таким образом, принятое допущение о расположении нейтрального слоя приводит к тому, что нормальная сила $N = \int_A \sigma dA$ не равна нулю, что противоречит условиям нагружения рассматриваемого стержня (здесь $A$ — площадь поперечного сечения стержня). Условие $N = \int_A \sigma dA = 0$ будет соблюдаться в том случае, если нейтральный слой сместить к центру кривизны на расстояние $e$ (рис. 3.34, *г*) для того, чтобы площади эпюры σ слева и справа от оси были равновелики.

Величина смещения

$$e = r_0 - r_n,$$

где $r_n$ — радиус кривизны нейтрального слоя, который определяется по формуле

$$r_n = \frac{A}{\int_A \frac{dA}{r}},$$





где $A = bh$; $r$ — расстояние от точки стержня до центра его кривизны; $dA = bdr$.

Таким образом,

$$r_n = \frac{h}{\ln \frac{R_2}{R_1}}.$$

Так как величина $e$ определяется разностью двух близких (особенно в случае сравнительно небольшой кривизны стержня) величин $r_0$ и $r_n$, то необходимо их вычислить с высокой точностью (4–5 значащих цифр).

Нормальное напряжение σ в точках поперечного сечения стержня, находящихся на расстоянии $r$ от центра кривизны, определяется по формуле

$$\sigma = \frac{M(r - r_n)}{Aer}.$$

Изгибающий момент $M$ принимается положительным, если он увеличивает кривизну стержня (см. рис. 3.34, *а*), и отрицательным — если уменьшает.

При нагружении исследуемого стержня (рис. 3.35) в сечении $A$–$A$ возникают изгибающий момент $M$ и нормальная сила $N$.

Из условий равновесия

$$N = F,$$
$$M = -F(r_0 + l).$$

Нормальное напряжение σ в поперечном сечении $A$–$A$ равно

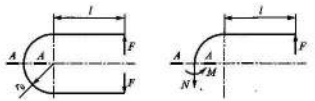



**Рис. 3.35.** Расчетная схема стержня

$$\sigma = \frac{-F(r_0 + l)(r - r_0)}{Aer} + \frac{F}{A}.$$

Решение задачи изгиба стержня большой кривизны прямоугольного поперечного сечения методами теории упругости получено Х.С. Головиным в 1880 г. Согласно этому решению, в стержне имеет место двухосное напряженное состояние, характеризуемое напряжениями $\sigma_r$ и $\sigma_t$ (см. рис. 3.34, *е*):

$$\sigma_r = \frac{4M}{bC}\left(\frac{R_1^2 R_2^2}{r^2}\ln\frac{R_2}{R_1} + R_2^2 \ln\frac{r}{R_2} + R_1^2 \ln\frac{R_1}{r}\right),$$

$$\sigma_t = \frac{4M}{bC}\left(-\frac{R_1^2 R_2^2}{r^2}\ln\frac{R_2}{R_1} + R_2^2 \ln\frac{r}{R_2} + R_1^2 \ln\frac{R_1}{r} + R_2^2 - R_1^2\right),$$

где

$$C = \left(R_2^2 - R_1^2\right)^2 - 4R_1^2 R_2^2 \left(\ln\frac{R_2}{R_1}\right)^2.$$

Эпюры напряжений с нанесенными на них экспериментальными точками, построенные в соответствии с теорией упругости и сопротивления материалов, позволяют судить о справедливости допущений, принятых при решении задачи о внецентренном растяжении-сжатии кривого стержня.

## 3.9. Исследование напряженного состояния в стержне при совместном изгибе и кручении методом тензометрии

В этой экспериментальной работе с помощью розетки тензорезисторов измеряются деформации в произвольной точке боковой поверхности тонкостенного трубчатого стержня. Стержень подвергается совместному изгибу и кручению. С учетом значений измеренных деформаций вычисляются главные напряжения и их направления. Полученные экспериментальные результаты сравниваются с теоретическими.





### Характеристика установки

Объектом исследования является тонкостенный трубчатый стержень, нагружаемый изгибающим и крутящим моментами (рис. 3.36).

В точке *А* сечения *I* приклеены три тензорезистора для измерения деформаций (рис. 3.37).

Деформации измеряются с помощью электронного измерителя деформаций, для градуировки шкалы которого в конструкции предусмотрена возможность шарнирного опирания свободного края стержня. В этом случае стержень нагружается только крутящим моментом.

### Краткие теоретические сведения

В любой точке поверхности тела, нагруженного произвольным образом, возникает плоское напряженное состояние (при отсутствии силового воздействия на поверхность тела). При этом одна главная площадка и главное напряжение известны: $\sigma'_{III} = 0$, а значения и направления двух других главных напряжений необходимо найти.

Для определения значений и направлений этих напряжений следует измерить деформации стержня в направлении трех осей *u*, *v*, *z*, проходящих через заданную точку *А*, с помощью трех тен-

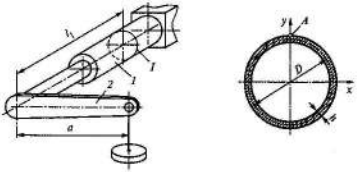



**Рис. 3.36.** Схема установки:
*1* — стержень; *2* — рычаг

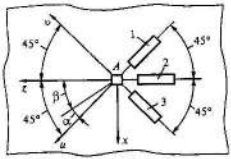



**Рис. 3.37.** Схема расположения тензорезисторов *1–3* в точке *A* сечения *I*

зорезисторов, наклеенных в этой точке (см. рис. 3.37). По измеренным в направлении осей *u*, *υ*, *z* деформациям $\varepsilon_u$, $\varepsilon_\upsilon$, $\varepsilon_z$ вычисляем главные деформации $\varepsilon''$ и $\varepsilon'''$ и угол $\alpha$ между осью *u* и одной из главных осей по формулам

$$\varepsilon'^{,''} = \frac{\varepsilon_u + \varepsilon_\upsilon}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{2}\left[(\varepsilon_u - \varepsilon_z)^2 + (\varepsilon_\upsilon - \varepsilon_z)^2\right]},$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2\varepsilon_z - (\varepsilon_u - \varepsilon_\upsilon)}{\varepsilon_u - \varepsilon_\upsilon}.$$

Затем с помощью обобщенного закона Гука находим значения главных напряжений:

$$\sigma' = \frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon' + \nu\varepsilon''),$$

$$\sigma'' = \frac{E}{1-\upsilon^2}(\varepsilon'' + \upsilon\varepsilon'),$$

после чего присваиваем главным напряжениям индексы 1, 2, 3 так, чтобы $\sigma_1 \geqslant \sigma_2 \geqslant \sigma_3$.

Напряженное состояние в точке *A*, расположенной на поверхности стержня, показано на рис. 3.38.





Нормальные и касательные напряжения определяются по формулам:

$$\sigma_z = \sigma_{max} = \frac{M_x}{W_x},$$

$$\tau_{zx} = \tau_{max} = \frac{M_x}{W_p},$$

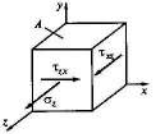



**Рис. 3.38.** Схема напряженного состояния в точке *A*

где $M_x = Fl_1$, $M_x = Fa$ — изгибающий и крутящий моменты в сечении *I*;

$W_x = \dfrac{\pi D^3 h}{4}$ — момент сопротивления сечения стержня изгибу;

$W_p = \dfrac{\pi D^2 h}{2}$ — момент сопротивления сечения стержня кручению.

Главные напряжения и угол наклона главной оси напряжений к продольной оси стержня вычисляются по формулам:

$$\sigma_{1,3} = \frac{\sigma_z}{2} \pm \sqrt{\frac{\sigma_z^2}{2} + \tau_{zx}^2},$$

$$\operatorname{tg} 2\beta = \frac{2\tau_{zx}}{\sigma_z},$$

$$\alpha + \beta = 45°.$$

Нагружение стержня производится ступенчато, и на каждой ступени нагружения регистрируются показания электронного измерителя деформаций.

Прежде чем начать измерения, необходимо найти цену деления шкалы измерителя деформаций. Для этого к консольному краю стержня подводится шарнирная опора, которая предотвращает его изгиб. При кручении стержня с помощью прибора измеряются деформации. Полученные значения сопоставляются со значениями деформаций, вычисленными теоретически. Таким образом определяется цена деления шкалы измерителя деформаций. Зная цену деления, на основании результатов измерений можно

найти главные напряжения и их направления, значения которых сравниваются с теоретическими результатами.

## 3.10. Исследование напряжений и перемещений в стержне при внецентренном растяжении

В зависимости от свойств рассчитываемой конструкции выбирается та или иная расчетная схема. На примере растягиваемых стержней различной жесткости проводится сопоставление результатов расчета и эксперимента.

### Характеристика установки

Объектом исследования является стержень прямоугольного поперечного сечения, представленный на рис. 3.39.

Стержень закрепляется шарнирно в вилках (правой и левой) (рис. 3.40). Правая вилка соединена с динамометром, левая — с нагружающим устройством винтового типа. В средием сечении *А–А* стержня наклеены два тензорезистора типа ФКПА-10-100 (фольговые, база 10 мм, сопротивление 100 Ом). Компенсационный тензорезистор наклеен на свободную пластинку, расположенную вблизи рабочих тензорезисторов. Тензорезисторы подключены к электронному измерителю деформаций.

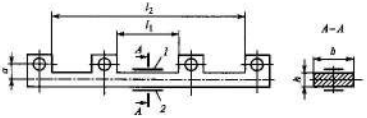



**Рис. 3.39.** Стержень прямоугольного поперечного сечения:
*1* и *2* — тензорезисторы





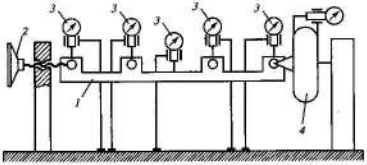



**Рис. 3.40.** Схема установки:
*1* — образец; *2* — нагружающее устройство; *3* — прогибомеры; *4* — динамометр

### Краткие теоретические сведения

Стержни, работающие на изгиб, подразделяют на стержни большой жесткости (жесткие стержни) и малой жесткости (гибкие стержни). При расчете жесткого стержня внутренние силы определяются без учета его прогибов. При определении внутренних сил гибкого стержня необходимо учитывать его прогибы.

Жесткий стержень показан на рис. 3.41. Изгибающий момент и нормальная сила во всех сечениях стержня постоянны и равны

$$M_z = Fa,$$
$$N = F.$$

Изгибающий момент определяется без учета перемещений се-

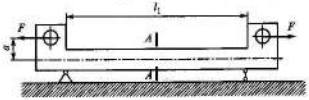



**Рис. 3.41.** Жесткий стержень

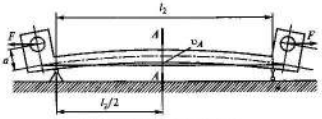



**Рис. 3.42.** Гибкий стержень

чений стержня. Максимальное и минимальное напряжения в любом сечении стержня определяются зависимостью

$$\sigma_{\substack{\max\\ \min}} = \pm\frac{M_x}{W_x} + \frac{N}{A}.$$

После подстановки величин $M_x$ и $N$ получаем

$$\sigma_{\substack{\max\\ \min}} = \pm\frac{Fa}{W_x} + \frac{F}{A}.$$

Гибкий стержень показан на рис. 3.42. Изгибающий момент $M_x$ в этом случае вдоль оси стержня переменный и в среднем сечении $A$—$A$ стержня (рис. 3.43) определяется формулой

$$M_x = -F(a - \upsilon_A),$$

где $\upsilon_A$ — перемещение среднего сечения.

Нормальная сила в среднем сечении $A$—$A$

$$N = F.$$

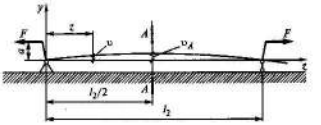



**Рис. 3.43.** Расчетная схема гибкого стержня





Определим перемещение сечений стержня с помощью дифференциального уравнения упругой линии (точный метод). Для этого применим метод сечений (рис. 3.44).

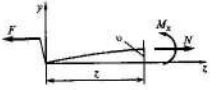



**Рис. 3.44.** Иллюстрация метода сечений

Запишем дифференциальное уравнение упругой линии:

$$EI_x\upsilon'' = M_x(z). \tag{3.12}$$

Изгибающий момент в сечении с координатой $z$

$$M_x(z) = -F(a - \upsilon). \tag{3.13}$$

Подставив (3.13) в (3.12), получим

$$EI_x\upsilon'' = -F(a - \upsilon). \tag{3.14}$$

Разделим обе части уравнения (3.14) на $EI_x$:

$$\upsilon'' - \frac{F}{EI_x}\upsilon = -\frac{F}{EI_x}a.$$

Обозначим

$$\frac{F}{EI_x} = k^2,$$

тогда

$$\upsilon'' - k^2\upsilon = -k^2a. \tag{3.15}$$

Решение дифференциального уравнения (3.15) ищем в виде

$$\upsilon = C_1 shkz + C_2 chkz + a.$$

Запишем граничные условия:

1) $z = 0, \quad \upsilon = 0,$
2) $z = l/2, \quad \upsilon' = 0.$

Из 1-го граничного условия $C_2 = -a$. Из 2-го граничного условия при $\upsilon' = kC_1 shkz + kC_2 chkz$ получим $C_1 = ath\dfrac{kl}{2}$.

Перемещение сечений стержня определяется зависимостью

$$\upsilon = a\left(th\frac{kl}{2}shkz - achkz + 1\right).$$

Определим перемещение сечения $A$—$A$ $\left(z_A = \frac{l}{2}\right)$:

$$\upsilon_A = a\left(1 + \frac{sh^2\frac{kl}{2}}{ch\frac{kl}{2}} - ch\frac{kl}{2}\right) = a\left(\frac{ch\frac{kl}{2} - 1}{ch\frac{kl}{2}}\right) = a\left(1 - \frac{1}{ch\frac{kl}{2}}\right).$$

Вычислим перемещение сечения $A$—$A$ в предположении, что изгибающий момент вдоль оси стержня постоянен (см. рис. 3.41). Применим правило Верещагина:

$$\upsilon_A = \frac{1}{EI_x}\frac{1}{2}\frac{l}{4}lFa = \frac{Fl^2a}{8EI_x}.$$

С учетом перемещения сечения $A$—$A$ определим изгибающий момент в этом сечении:

$$M_x = F(a - \upsilon_A).$$

Напряжения в наиболее удаленных от нейтральной оси точках среднего сечения определяются по формуле

$$\sigma_{\substack{\max\\ \min}} = \pm\frac{F(a - \upsilon_A)}{W_x} + \frac{F}{A}.$$

Если влияние жесткостных свойств рассматриваемых стержней не учитывается, это приводит к большим погрешностям расчетов.





## 3.11. Исследование напряженного состояния в зоне концентратора напряжений

Существенное влияние на прочность элементов конструкций оказывают местные напряжения, возникающие в области резких изменений формы детали или в зоне силового контакта. Концентрацию напряжений следует рассматривать как один из главных факторов, определяющих выносливость детали в условиях переменных напряжений [13].

В этой экспериментальной работе изучается распределение напряжений в зоне концентратора напряжений и в удаленной от нее области, определяется коэффициент концентрации напряжений.

### Характеристика установки

Объект исследования представляет собой стержень с поперечным сечением двутавровой формы, расположенный на двух опорах (рис. 3.45).

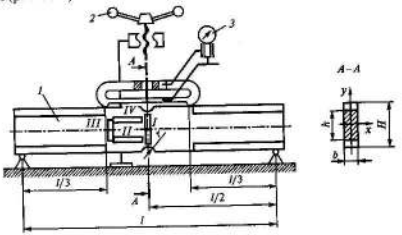



**Рис. 3.45.** Схема установки для изучения концентрации напряжения:

*1* — стержень; *2* — нагружающее устройство; *3* — силоизмеритель; *I, II, III, IV* — группы тензорезисторов

В центральной части стержня полки двутавра удалены и сечение имеет прямоугольную форму. Сила создается нагружающим устройством винтового типа, в комплект которого входят упругий элемент и индикатор часового типа. Значение силы $F$ определяется по показаниям индикатора с помощью градуировочной таблицы. При выбранной схеме нагружения стержня его центральная часть испытывает чистый изгиб, при этом изгибающий момент

$$M_x = \frac{Fl}{6}.$$

В среднем сечении *А—А* стержень имеет концентраторы напряжений в виде полукруглых выточек радиусом $r$.

В зоне чистого изгиба наклеены четыре группы тензорезисторов (рис. 3.46).

Каждая группа тензорезисторов подключена к соответствующему каналу электронного измерителя деформаций. Тензорезисторы группы *I* позволяют измерять продольные деформации в




**Рис. 3.46.** Схема расположения тензорезисторов:
номер тензорезистора указан арабской цифрой, номер группы тензорезисторов — римской





зоне концентратора напряжений и определять характер изменения напряжений по высоте в сечении *А—А*. С помощью тензорезисторов групп *II* и *III* выявляется зона снижения напряжений до номинальных значений. Тензорезисторы группы *III* измеряют деформации в сечении *Б—Б*, где влияние концентратора отсутствует и, следовательно, напряжения номинальны.

## Краткие теоретические сведения

В зоне изменения формы детали (отверстия, выступы, канавки, шлицы, выточки, резьба, галтели) нарушается плавное распределение внутренних сил, возникает локальное повышение их интенсивности, т. е. появляются высокие местные напряжения. Причины, вызывающие высокие местные напряжения, называют концентраторами напряжений, а появление местных напряжений вблизи концентратора — концентрацией напряжений. Местные напряжения могут быть следствием некоторых технологических процессов (сварка, литье, термообработка). Концентрация напряжений возникает также в местах силового контакта деталей.

Следует отметить, что в зоне концентратора напряжений напряженное состояние оказывается, как правило, сложным. Достигая высоких значений вблизи концентратора, местные напряжения быстро убывают и не нарушают характера напряженного состояния в удаленных от концентратора местах детали. Несмотря на это, влияние концентрации напряжений на прочность и долговечность конструкции может оказаться решающим.

Если в процессе эксплуатации конструкции напряжения периодически изменяются, то зона концентрации напряжений может стать очагом образования трещины, вызывающей преждевременное разрушение конструкции (явление усталости). Поэтому при проектировании объектов, работающих в условиях переменных во времени напряжений, и при оценке их прочности и долговечности следует учитывать концентрацию напряжений [13]. Этот учет необходим и при статическом нагружении деталей, изготовленных из малопластичных или хрупких материалов.

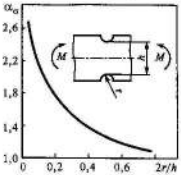



**Рис. 3.47.** Зависимость коэффициента концентрации напряжений от параметра $2r/h$

Для оценки концентрации напряжений находят отношение наибольшего местного напряжения $\sigma_{max}$ к номинальному $\sigma_{ном}$ и называют это отношение теоретическим коэффициентом концентрации напряжений

$$\alpha_\sigma = \frac{\sigma_{max}}{\sigma_{ном}}.$$

Номинальное напряжение $\sigma_{ном}$ находят по расчетным формулам сопротивления материалов, т. е.

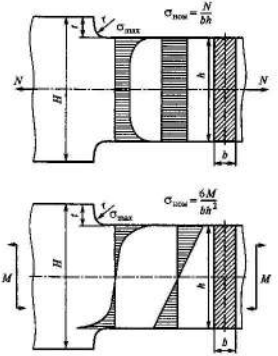



**Рис. 3.48.** Эпюры местных и номинальных напряжений





без учета влияния концентратора напряжений. Значения $\sigma_{max}$ могут быть вычислены теоретически с помощью методов теории упругости или получены экспериментально (тензометрирование, поляризационно-оптический метод).

На рис. 3.47 приведена зависимость теоретического коэффициента концентрации $\alpha_\sigma$ при изгибе стержня с двусторонними выточками в зависимости от параметра $2r/h$ [14].

Одному и тому же концентратору напряжений соответствуют разные коэффициенты $\alpha_\sigma$ в зависимости от вида нагружения детали (рис. 3.48, 3.49). На рисунках приведены коэффициенты $\alpha_\sigma$ при растяжении и при изгибе стержня с двусторонними выступами, а также показаны эпюры местных и номинальных напряжений.

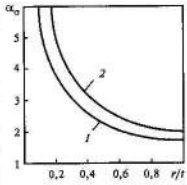



**Рис. 3.49.** Теоретические коэффициенты концентрации напряжений:
*1* — растяжение; *2* — изгиб

## 3.12. Определение критической нагрузки для гибкого сжатого стержня

Гибкий сжатый стержень может терять устойчивость, т. е. переходить в новое положение устойчивого равновесия [7]. Этот переход сопровождается большими перемещениями, возникновением больших пластических деформаций и даже полным разрушением стержня. Прямолинейный сжатый стержень устойчив только в том случае, если значение сжимающей силы меньше критического значения. При силе, большей критической, стержень неминуемо изогнется — произойдет потеря устойчивости.

Экспериментальное изучение потери устойчивости представляет достаточно трудную задачу.

### Характеристика установки

Объектом исследования является стержень прямоугольного поперечного сечения. Стержень установлен в правой и левой опорах, конструкция которых позволяет осуществлять шарнирное или жесткое закрепление концов стержня в плоскости наименьшей жесткости (рис. 3.50).

Правая опора соединена с динамометром, левая — с нагружающим устройством винтового типа. В среднем поперечном сечении $A-A$ стержня на штативной стойке установлен прогибомер — индикатор часового типа.

### Краткие теоретические сведения

Для идеального гибкого стержня критическая сила $F_{кр}$ определяется по формуле Эйлера

$$F_{кр} = \frac{\pi E J_{min}}{(\mu l)^2}.$$

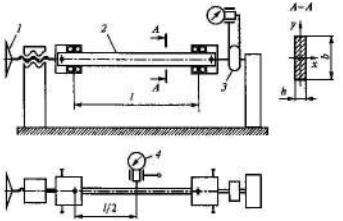



**Рис. 3.50.** Схема установки для изучения устойчивости стержня:

*1* — нагружающее устройство; *2* — стержень; *3* — динамометр; *4* — прогибомер





Рассматриваются три схемы закрепления стержня (рис. 3.51).

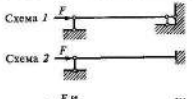



**Рис. 3.51.** Схемы закрепления стержня

Реальный стержень не является идеальным, так как содержит несовершенства. Наибольшее практическое значение имеют два несовершенства: начальная кривизна и внецентренное приложение силы.

В установке приняты меры к снижению эксцентриситета приложения силы до приемлемого уровня. Эксцентриситет составляет 0,1…0,15 мм, поэтому наибольшее значение для установки имеет начальная кривизна, так как идеально прямой гибкий стержень изготовить практически невозможно. Получим приближенную формулу, позволяющую учесть влияние начальной кривизны стержня на зависимость «продольная сила — характерное перемещение».

Пусть шарнирно опертый по концам неидеальный стержень имеет начальную кривизну (рис. 3.52). Будем считать, что геометрическая ось стержня до нагружения описывается функцией

$$u_0 = f_0 \sin\frac{\pi z}{l}.$$

При нагружении упругая линия стержня показана на рис. 3.53.

Дифференциальное уравнение упругой линии при нагружении продольной силой $F$ имеет вид

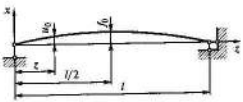



**Рис. 3.52.** Расчетная схема неидеального стержня

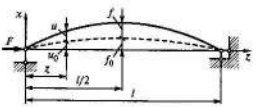



**Рис. 3.53.** Расчетная схема неидеального стержня при нагружении

$$EI_y u'' = M_y(z),$$
$$M_y(z) = -F(u_0 + u),$$
$$EI_y u'' = -F(u_0 + u),$$
$$u'' + k^2 u = -k^2 u_0,$$

где $k^2 = \frac{F}{EI_y}$.

Запишем решение дифференциального уравнения в виде

$$u = C_1 \sin kz + C_2 \cos kz + u_*. \qquad (3.16)$$

Частное решение неоднородного дифференциального уравнения представим в виде

$$u_* = B \sin \frac{\pi z}{l}.$$

Продифференцируем $u_*$ по $z$:

$$u_*' = B \frac{\pi}{l} \cos \frac{\pi z}{l},$$
$$u_*'' = -B \frac{\pi^2}{l^2} \sin \frac{\pi z}{l}.$$

Подставим полученные выражения в (3.16):





$$-\frac{\pi^2}{l^2} B \sin \frac{\pi z}{l} + k^2 B \sin \frac{\pi z}{l} = -k^2 f_0 \sin \frac{\pi z}{l},$$
$$B\left(-\frac{\pi^2}{l^2} + k^2\right) = -k^2 f_0.$$

После преобразования получаем

$$B = \frac{-f_0}{1 - \frac{\pi^2 EI_y}{l^2 F}}.$$

Принимаем, что эйлерова сила $F_э = \frac{\pi^2 EI_y}{l^2}$, тогда $B = \frac{-f_0}{1 - \frac{F_э}{F}}$.

Граничные условия:

$$z = 0,\ u = 0 \Rightarrow C_2 = 0,$$
$$z = l,\ u = 0 \Rightarrow C_1 = 0.$$

Окончательно получаем

$$u = \frac{-f_0}{1 - \frac{F_э}{F}} \sin \frac{\pi z}{l}.$$

Определим прогиб сечения при $z = \frac{l}{2}$:

$$f = \frac{-f_0}{1 - \frac{F_э}{F}}.$$

Преобразуем полученную зависимость к виду

$$\frac{f}{F} = \frac{f}{F_э} + \frac{f_0}{F_э}.$$

Нужно отметить, что определенная по этому методу эйлерова сила $F_э$ совпадает с $F_{кр}$ идеального стержня при соблюдении двух условий:

1) начальная кривизна оси стержня должна лежать в плоскости наименьшей жесткости;

2) гибкость стержня в плоскости наименьшей жесткости должна быть выше предельной, определяемой пределом пропорциональности материала $\sigma_{пц}$:

$$\lambda_{пц} = \sqrt{\frac{\pi^2 E}{\sigma_{пц}}}.$$

Приведенный анализ поведения гибкого сжатого стержня справедлив в пределах применимости закона Гука.

## 3.13. Исследование продольно-поперечного изгиба стержня

В этой экспериментальной работе исследуется зависимость прогибов стержня при продольно-поперечном изгибе от значения продольной силы. При этом поперечная нагрузка считается фиксированной. Полученные экспериментальные значения сравниваются с теоретическими, вычисленными с помощью разных методов.

### Характеристика установки

Установка состоит из двух опор, в которых закреплены стаканы, обеспечивающие шарнирное закрепление краев стержня (рис. 3.54). В левой опоре размещается винтовое нагружающее устройство, а в правой — динамометр, измеряющий осевую силу. Установка снабжена устройством для нагружения поперечной силой и прогибомером для измерения прогибов среднего сечения стержня. Нагружение стержня поперечной силой производится с помощью груза, а продольной силой — с помощью нагружающего устройства.





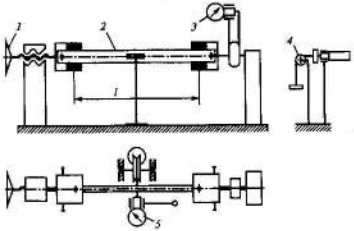



**Рис. 3.54.** Схема установки для изучения продольно-поперечного изгиба стержня:
*1* — нагружающее устройство; *2* — стержень; *3* — динамометр; *4* — устройство для нагружения поперечной силой; *5* — прогибомер

### Краткие теоретические сведения

Изгиб стержня при одновременном действии на него продольных и поперечных сил называется продольно-поперечным изгибом. Расчетная схема стержня представлена на рис 3.55. Для решения задачи продольно-поперечного изгиба и определения прогибов можно воспользоваться дифференциальным уравнением изогнутой оси стержня

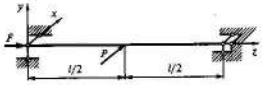



**Рис. 3.55.** Расчетная схема стержня

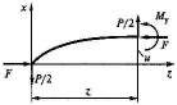



**Рис. 3.56.** Иллюстрация метода сечений

$$EI_y u'' = M_y.$$

Для левой половины стержня (рис. 3.56) уравнение имеет вид

$$EI_y u'' = -Fu - \frac{P}{2}z. \qquad (3.17)$$

Учитывая граничные условия $z=0,\ u=0,\ z=\frac{l}{2}$ и $u'=0$, решение уравнения (3.17) запишем в виде

$$u = \frac{P}{2kF}\left(\frac{\sin kz}{\cos\frac{kl}{2}} - kz\right), \qquad (3.18)$$

где $k=\sqrt{\frac{F}{EI_y}}$.

Максимальный прогиб (в середине стержня $z=\frac{l}{2}$) можно найти по формуле

$$u_{max} = \frac{P}{2kF}\left(\operatorname{tg}\frac{kl}{2} - \frac{kl}{2}\right). \qquad (3.19)$$

Кроме дифференциального уравнения существует другой метод, который позволяет приближенно определить максимальный прогиб:

$$u_{max} = \frac{u_n}{1-\frac{F}{F_э}}, \qquad (3.20)$$

где $u_n$ — прогиб, найденный только от поперечной нагрузки, т. е. без учета силы $F$; $F$ — продольная сила; $F_э$ — эйлерова сила $\left(F_э = \frac{\pi^2 EI_y}{l^2}\right)$.





Следует иметь в виду, что формулами (3.19) и (3.20) можно пользоваться при нагрузках, не превышающих $(0{,}7\ldots0{,}8)F_э$, так как при больших значениях силы $F$ резко нарастают прогибы, что противоречит исходным предположениям о малости перемещений.

Для нашего случая $u_n$ — прогиб только от силы $P$ можно найти методом Мора — Верещагина:

$$u_n = \frac{Pl^3}{48EI_y}.$$

Результаты, найденные по формулам (3.19) и (3.20), близки между собой.

Нагружение стержня производится ступенчато, и на каждой ступени нагружения регистрируется максимальный прогиб стержня. По результатам измерений и вычислений строят три графика зависимости прогиба от продольной силы (один экспериментальный и два теоретических).

## 3.14. Исследование концентрации напряжений поляризационно-оптическим методом

Поляризационно-оптический метод — экспериментальный метод исследования напряженно-деформированного состояния деталей и конструкций на прозрачных моделях из оптически чувствительных материалов. Он позволяет эффективно решать практически любые задачи механики деформируемого тела: линейные и нелинейные задачи теории упругости (фотоупругость), пластичности (фотопластичность) и ползучести (фотоползучесть). Успехи в теории моделирования и применение ЭВМ существенно расширяют возможности метода.

В этой экспериментальной работе исследуется с помощью поляризационно-оптического метода концентрация напряжений.

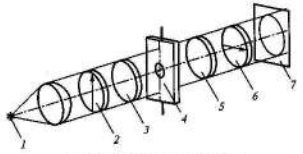



**Рис. 3.57.** Схема полярископа

### Характеристика установки

Поляризационная установка (полярископ), принципиальная схема которой приведена на рис. 3.57, состоит из следующих основных элементов: *1* — источник света; *2* — поляризатор; *3, 5* — пластинки в четверть волны; *4* — модель; *6* — анализатор; *7* — экран (фотопластинка). Нагружающее устройство рычажного типа (рис. 3.58) с соотношением плеч рычагов, равным 10.

### Краткие теоретические сведения

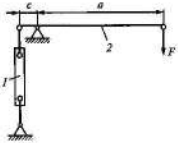



**Рис. 3.58.** Схема нагружения модели:
*1* — модель; *2* — рычаг

В основе поляризационно-оптического метода исследования напряженного состояния лежит использование так называемого пьезооптического эффекта, т. е. способности некоторых прозрачных материалов (стекло, эпоксидные смолы и другие полимеры) приобретать свойство двойного лучепреломления под действием нагрузки [15]. При исследовании модели из такого материала в





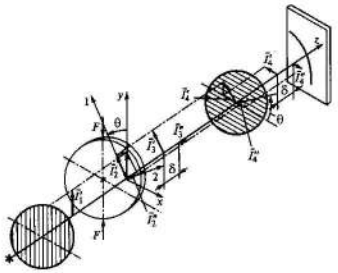



**Рис. 3.59.** Ход лучей в полярископе

плоско-поляризованном свете, который создается с помощью поляризатора, световой вектор $\vec{I}_1$ в каждой точке нагруженной модели разлагается на две составляющие $\vec{I}'_2$ и $\vec{I}''_2$, направления которых совпадают с направлениями главных напряжений $\sigma_1$ и $\sigma_2$ (рис. 3.59).

Эти составляющие проходят модель с разными скоростями и на выходе получают разность хода $\delta$ (векторы $\vec{I}'_3$ и $\vec{I}''_3$). С помощью анализатора, оптическая ось которого перпендикулярна оптической оси поляризатора, световые волны сводятся в одну плоскость и интерферируют (векторы $\vec{I}'_4$ и $\vec{I}''_4$). Интенсивность света $I$, попадающего на экран, определяется соотношением

$$I = ka^2 \sin 2\theta \sin^2 \frac{\pi\delta}{\lambda}, \qquad (3.21)$$

где $k$ — коэффициент пропорциональности; $a$ — амплитуда светового вектора; $\theta$ — угол, определяющий направление светового

вектора и главных напряжений относительно системы координат (его называют параметром изоклины); $\delta$ — оптическая разность хода лучей; $\lambda$ — длина волны монохроматического света.

Из выражения (3.21) следует, что наименьшая интенсивность света в данной точке модели может наблюдаться в трех случаях.

*Первый случай.* $\theta = \frac{\pi n}{2}$, где в точках $m = 0, 1, 2...$ направление вектора $\overline{l}_1$ (см. рис. 3.59) совпадает с направлением одного из главных напряжений. Линии, соединяющие эти точки, называются изоклинами.

*Второй случай.* $\sin\frac{\pi\delta}{\lambda} = 0$ или $\delta = n\lambda$, где $n = 1, 2, 3...$ Линии, вдоль которых оптическая разность хода лучей постоянна, называются изохромами, или полосами, поэтому величина $n$ носит название порядка полосы. В пределах упругости распределение изохром подчиняется закону Вертгейма:

$$\sigma_1 - \sigma_2 = \frac{n\lambda}{C_\sigma l} = \frac{\sigma_0 n}{t}, \qquad (3.22)$$

где $C_\sigma$ — постоянная материала; $t$ — толщина модели; $\sigma_1$, $\sigma_2$ — главные напряжения в точках модели; $\sigma_0 = \frac{\lambda}{C_\sigma}$ — оптическая цена полосы материала, постоянная, показывающая, на сколько изменяется разность главных напряжений в модели толщиной 10 мм при изменении порядка изохромы на единицу. Она определяется экспериментально.

Часто в выражении (3.22) используют постоянную

$$\sigma_0' = \frac{\sigma_0}{t},$$

которую называют ценой полосы модели. Так как $\sigma_1 - \sigma_2 = 2\tau_{max}$, изохромы являются линиями постоянных значений максимальных касательных напряжений $\tau_{max}$. С другой стороны $\sigma_1 - \sigma_2 = \sigma_{экв}$,





если $\sigma_2 \leqslant 0$. Таким образом, полосы одновременно являются линиями одинаковых эквивалентных напряжений по теории Треска — Сен-Венана. Этим во многом и определяется высокая эффективность метода фотоупругости при решении практических задач.

*Третий случай.* $\sigma = 0$ или $\sigma_1 - \sigma_2 = 0$. Точки, в которых соблюдается это условие, называются изотропными точками. К ним относятся такие точки или области, в которых напряжения отсутствуют.

Таким образом, при просвечивании нагруженной модели плоскополяризованным светом на экране установки видны две системы линий: изохромы и изоклины, а также изотропные точки (области).

**Расшифровка интерференционной картины.** При анализе напряженного состояния в модели методом фотоупругости нужно получить распределения изоклин и изохром отдельно друг от друга. Для их разделения модель просвечивают белым светом. Тогда условие $\delta = n\lambda$ выполняется в каждой точке только для определенной длины волны $\lambda$, а другие световые волны проходят с той или иной степенью интенсивности. Поэтому на экране изохромы видны цветными (отсюда название «изохромы», т. е. линии одного цвета), а изоклины остаются темными, так как они от длины волны не зависят.

Поскольку изоклины указывают направления главных напряжений и могут быть использованы для их определения, то в процессе эксперимента их зарисовывают или фотографируют. Синхронно поворачивая скрещенные под углом 90° поляроиды на определенный угол от первоначального положения, получают изоклину параметра $\theta$. При изменении угла от нуля до 90° с шагом 10…15° строится поле изоклин для всей модели. На рис. 3.60 слева изображены изоклины для плоского диска, сжатого по диаметру.

Для получения изохром отдельно от изоклин используют круговой полярископ, в котором устанавливаются две четвертьволновые пластинки (см. рис. 3.57). Их оптические оси находятся под углом 45° к осям поляризатора и анализатора. Первая пластинка преобразует плоскополяризованный свет в поляризованный по кругу, для которого интенсивность света не зависит от направлений главных напряжений. Следовательно, в круговом полярископе отсутст-

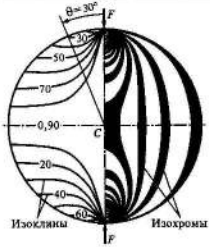



**Рис. 3.60.** Система изохром и изоклин

вуют условия для образования изоклин. Вторая пластинка компенсирует разность хода лучей, приобретенную за счет первой, поэтому на анализатор попадают два луча света, имеющие сдвиг по фазе только вследствие двойного лучепреломления испытуемой модели.

Картина полос в сжатом по диаметру диске приведена на рис. 3.60 справа. Изотропные точки от изоклин можно отличить при вращении поляроидов: изоклины при этом будут смещаться, а изотропные точки останутся на месте.

**Определение разности главных напряжений методом полос.** Название метода указывает на способ определения оптической разности хода лучей путем наблюдения за изменением картины изохром на экране полярископа при нагружении модели или в результате анализа соответствующей фотографии. Метод применим для материалов, обладающих высокой оптической чувствительностью (эпоксидные смолы ЭД-16, ЭД-20, ОАСО).

Из выражения (3.22) следует, что для определения разности $\sigma_1 - \sigma_2$ необходимо знать порядок полосы в точке и оптическую постоянную $\sigma_0$.

Существуют несколько способов нахождения порядка полосы $n$.





1. Наиболее надежным является наблюдение за образованием картины изохром в процессе нагружения модели. Для более точного определения величины $n$ в данной точке при заданной нагрузке $F$ следует построить график $n = f(F)$, имеющий вид прямой линии.

2. При наличии в модели изотропной точки (области) подсчет полос ведется от нее, как от полосы нулевого порядка.

3. В моделях, имеющих выступающие углы, подсчет изохром удобно вести от них, так как напряжения, а следовательно, и порядок полос в этих точках равны нулю.

**Определение оптической постоянной.** Величину $\sigma_0$ можно определить путем испытания моделей, для которых имеется теоретическое решение (растяжение; чистый изгиб стержней; диск, сжатый по диаметру). Например, для растянутой модели:

$$\sigma_1 = \frac{F}{A} = \frac{F}{bt}, \quad \sigma_2 = 0,$$

тогда из (3.22) имеем

$$\sigma_0 = \frac{F}{bn}.$$

При чистом изгибе

$$\sigma_1 = \frac{M_{изг}}{W_z} = \frac{3Fl}{B^2 t}, \quad \sigma_2 = 0,$$

из (3.22) имеем

$$\sigma_0 = \frac{3Fl}{B^2 n},$$

где $n$ — порядок полосы на наружном контуре модели.

Для диска, сжатого по диаметру (см. рис. 3.60, точка $C$),

$$\sigma_1 - \sigma_2 = \frac{8F}{\pi D t} = \frac{\sigma_0 n}{t},$$

откуда имеем

$$\sigma_0 = \frac{8F}{\pi D n},$$

где $D$ — диаметр диска; $n$ — порядок полос в центре диска.

Этот способ является более точным, так как при неоднократном использовании моделей в них возникает так называемый краевой эффект (изменение оптической разности хода лучей вследствие старения материала, особенно заметное у поверхности модели). Порядок полос в центре диска практически не зависит от краевого эффекта.

Для более точного определения величины $\sigma_0$ следует во всех случаях пользоваться графиками $n = f(F)$.

**Определение напряжений на свободном контуре модели.** На свободном контуре одно из главных напряжений равно нулю, а другое $\sigma_k$ направлено по касательной к контуру. Оно может быть найдено из выражения (3.22):

$$\sigma_k = \frac{\sigma_0 n}{t}.$$

Во многих случаях (изгиб, внецентренное растяжение-сжатие и т. д.) максимальные напряжения возникают именно на контуре, поэтому поляризационно-оптический метод позволяет определять их, используя лишь картину полос. Знак контурного напряжения часто может быть найден из условия нагружения моделей. Например, при изгибе модели всегда можно отделить растянутую область от сжатой. В изотропных точках, находящихся на контуре, напряжения равны нулю. Эти точки разделяют зоны растяжения и сжатия в модели, что позволяет определить знак контурного напряжения.

В тех случаях, когда знак контурного напряжения из условий нагружения установить не удается, прибегают к специальным методам или используют специальные приборы-компенсаторы.

**Определение теоретического коэффициента концентрации при растяжении и изгибе.** Теоретический коэффициент концентрации напряжений находится из выражения $\alpha_\sigma = \frac{\sigma_{max}}{\sigma_{ном}}$, где максимальное напряжение в зоне концентрации напряжений $\sigma_{max}$ определяется методом фотоупругости.





Например, в растянутой модели максимальные напряжения возникают в сечении $Б—Б$ (рис. 3.61). При чистом изгибе модели опасным также является сечение $Б—Б$ (рис. 3.62). Номинальное напряжение $\sigma_{ном}$ для модели, работающей на растяжение, вычисляется по формуле

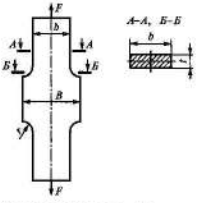



**Рис. 3.61.** Растянутая модель

$$\sigma_{ном} = \frac{F}{A_{min}} = \frac{F}{bt}.$$

При чистом изгибе модели

$$\sigma_{ном} = \frac{M_x}{W_{xmin}} = \frac{3Fl}{b^2 t}.$$

**Переход от модели к реальной детали.** Модели для исследования напряженного состояния с помощью поляризационно-оптического методом изготовляют с соблюдением подобия формы и размеров по отношению к реальной детали. Пересчет напряжений

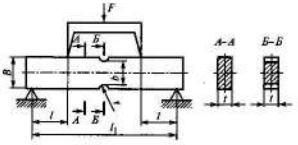



**Рис. 3.62.** Изогнутая модель

с модели М на деталь Д при известных внешних силах производится по формуле

$$\sigma_д = \frac{t_м l_м}{t_д l_д} \frac{F_д}{F_{об}} \sigma_{об},$$

В случае геометрического подобия модели и детали удобнее использовать критерий подобия в виде безразмерного напряжения $\bar{\sigma}$ (по аналогии с вычислением коэффициента концентрации напряжений) [15, 16]:

$$\bar{\sigma} = \frac{\sigma_{об}}{\sigma_{об.ном}},$$

где $\sigma_д$ и $\sigma_{об}$ — напряжения в исследуемой точке детали и модели соответственно.

Тогда напряжение в соответствующей точке детали находится из выражения

$$\sigma_д = \bar{\sigma} \sigma_{д.ном},$$

где $\sigma_{д.ном}$ — номинальное напряжение в детали.

Помимо указанных факторов следует учитывать влияние упругих постоянных модели и детали (модуль упругости и коэффициент Пуассона). Однако это обстоятельство во многих случаях не является существенным [17].



## Список литературы


1. *Курс* сопротивления материалов: М.М. Филоненко-Бородич, С.М. Изюмов, Б.А. Олисов, Л.И. Мальгинов. М.: Физматгиз, 1961. Ч. 1. 656 с.

2. *Малинин Н.Н.* Кто есть кто в сопротивлении материалов / Под ред. В.Л. Данилова. 2-е изд. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2002. 248 с.

3. *Писаренко Г.С., Стрижало В.А.* Экспериментальные методы в механике деформируемого твердого тела. Киев: Наукова Думка, 1986. 264 с.

4. *Ильюшин А.А., Ленский В.С.* Сопротивление материалов. М.: Физматгиз, 1959. 372 с.

5. *Расчеты* на прочность в машиностроении / С.Д. Пономарев, В.Л. Бидерман, К.К. Лихарев и др.; Под ред. С.Д. Пономарева. М.: Машиностроение, 1956. Т. 1. 884 с.

6. *Тимошук Л.Т.* Механические испытания металлов. М.: Металлургия, 1971. 224 с.

7. *Феодосьев В.И.* Сопротивление материалов: Учебное пособие для вузов. 10-е изд. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2001. 592 с.

8. *Методы* испытания, контроля и исследования машиностроительных материалов: Справочное пособие: В 3 т. / Под ред. А.Т. Туманова. М.: Машиностроение, 1974. Т. 2. 320 с.

9. *Бидерман В.Л., Бояршинов С.В., Лихарев К.К.* Лабораторные работы по курсу «Сопротивление материалов» / Под ред. С.Д. Пономарева. М.: Изд-во МВТУ им. Н.Э. Баумана, 1960. 187 с.

10. *Шапошников Н.А.* Механические испытания металлов. М.: Машиностроение, 1951. 384 с.

11. *Работнов Ю.Н.* Механика деформируемого твердого тела. 2-е изд. М.: Наука, 1988. 712 с.

12. *Тензометрия* в машиностроении: Справочное пособие / Под ред. Р.А. Макарова. М.: Машиностроение, 1975. 288 с.

13. *Когаев В.П.* Расчеты на прочность при напряжениях, переменных во времени. М.: Машиностроение, 1977. 232 с.

14. *Петерсон Р.* Коэффициенты концентрации напряжений: Пер. с англ. М.: Мир, 1977. 301 с.

15. *Александров А.Я., Ахметзянов М.Х.* Поляризационно-оптические методы механики деформируемого тела. М.: Наука, 1973. 525 с.

16. *Лешковцев В.Г., Семенов-Ежов И.Е., Ширшов А.А.* Применение поляризационно-оптического метода исследования напряжений в экспериментальной механике. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 1994. 41 с.

17. *Экспериментальная* механика: В 2 кн.: Пер с англ. / Под ред. А. Кобаяси. М.: Мир, 1990. Кн. 1. 616 с.

## Оглавление

Предисловие ..... 5

Глава 1. Механические испытания материалов ..... 7
1.1. Краткие исторические сведения ..... 7
1.2. Классификация методов механических испытаний ..... 12

Глава 2. Определение фундаментальных механических характеристик материалов ..... 37
2.1. Испытания образцов на растяжение ..... 37
2.2. Испытания образцов на сжатие ..... 45
2.3. Испытания образцов на кручение ..... 49
2.4. Определение упругих постоянных изотропного материала .. 57
2.5. Определение модуля упругости второго рода ..... 64

Глава 3. Экспериментальное обоснование расчетных моделей механики деформируемого твердого тела ..... 67
3.1. Исследование напряженного состояния при кручении стержня ..... 67
3.2. Прямой изгиб стержня ..... 69
3.3. Косой изгиб стержня ..... 74
3.4. Проверка принципа независимости действия сил ..... 80
3.5. Исследование статически неопределимого стержня при изгибе . 84
3.6. Определение напряжений и перемещений в плоской раме ... 90
3.7. Экспериментальная проверка теоремы о взаимности работ . 94
3.8. Исследование напряжений в плоском стержне большой кривизны при внецентренном растяжении ..... 97
3.9. Исследование напряженного состояния в стержне при совместном изгибе и кручении методом тензометрии ...102
3.10. Исследование напряжений и перемещений в стержне при внецентренном растяжении ..... 106
3.11. Исследование напряженного состояния в зоне концентратора напряжений ..... 111
3.12. Определение критической нагрузки для гибкого сжатого стержня ..... 115
3.13. Исследование продольно-поперечного изгиба стержня .... 120
3.14. Исследование концентрации напряжений поляризационно-оптическим методом ..... 123

Список литературы ..... 133

*Научное издание*

**Букеткин Борис Васильевич**
**Горбатовский Александр Александрович**
**Кисенко Игорь Дмитриевич**
**Котов Александр Иванович**
**Лазаренко Эдуард Семенович**
**Семенов-Ежов Игорь Евгеньевич**

# Экспериментальная механика

Редактор *Л.А. Михалева*
Корректор *Е.В. Авалова*
Художник *Н.Г. Столярова*
Компьютерная верстка *С.Ч. Соколовского*

Подписано в печать 20.07.2004. Формат 60×90 1/16.
Бумага офсетная. Печ. л. 9. Усл. печ. л. 8,5.
Тираж 1500 экз. Заказ № 10553

Издательство МГТУ им. Н.Э. Баумана,
105005, Москва, 2-я Бауманская, 5.

Отпечатано с оригинал-макета
в ГУП ППП «Типография «Наука».
121099, Москва, Шубинский пер., 6.

ISBN 5-7038-2458-3

