Оптимальное расположение сечения в виде правильного многоугольника

Дана балка с сечением в виде правильного n-угольника ($n \ge 3$). След силовой плоскости совпадает с вертикальной осью y. Необходимо повернуть балку вокруг своей оси так, чтобы обеспечить наибольшую прочность.

Введем обозначения: a – длина стороны, R и r – радиусы описанной и вписанной окружностей, соответственно.

Как известно, в правильных многоугольниках любая пара центральных осей является парой главных осей, осевые моменты инерции в которых равны $I_x = I_y = n \cdot \frac{R^4}{8} \sin\frac{2\pi}{n}\left(1 - \frac{2}{3}\sin^2\frac{\pi}{n}\right)$. То есть если целью является наибольшая жесткость, балку можно расположить как угодно. Однако прочность пропорциональна осевому моменту сопротивления $W_x = \frac{I_x}{y_{\max}}$. Поскольку числитель формулы постоянен, необходимо найти угол поворота, доставляющий минимум величине $y_{\max}$. Побочный вопрос: с какой стороны от оси x эта величина будет максимальна и, следовательно, где будет располагаться опасная точка? Если материал по-разному работает на растяжение и сжатие, то с той самой стороны надо обеспечить тот вид нагружения (растяжение или сжатие), для которого предельное напряжение выше.

Минимальная и максимальная ординаты при любом числе сторон равны радиусам r и R, соответственно ($r \le y_{\max} \le R$), и связаны соотношением

$$r = R\cos\frac{\pi}{n} \tag{1}$$

Прежде всего, ограничимся рассмотрением случая нечетных n. Связано это с тем, что при четном числе сторон прямая, проведенная через центр и вершину, приходит в другую вершину. Тогда очевидно, что надо расположить многоугольник гранью вверх (и вниз). Сказанное легко пояснить на примере квадрата (Рис. 1). При его плавном повороте из положения A в положение B максимальная ордината будет монотонно увеличиваться от $r = \frac{a}{2}$ до $R = a\frac{\sqrt{2}}{2}$, то есть положение B будет на 41% хуже. При числе сторон, равном 14, разница будет меньше 3%.

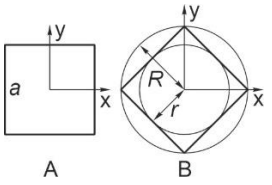


Рис. 1

Перейдем к случаю нечетного числа сторон. В таких фигурах прямая, проведенная через центр и вершину, пройдет через середину противолежащей стороны (Рис. 2). Условимся положительной поворот отсчитывать против часовой стрелки, а начальным положением считать такое, при котором вершина лежит на оси y и имеет положительную ординату. Тогда максимальная ордината сверху равна R, снизу – r. Угол, стягивающий сторону, равен $\beta = \frac{2\pi}{n}$. При повороте на угол $\frac{\beta}{2}$ верхняя и нижняя стороны поменяются местами, то есть вершина будет снизу, и далее все повторится, но со сменой знака ординаты. Значит, достаточно изучить зависимость максимальной ординаты от угла поворота в диапазоне $0\ldots\frac{\pi}{n}$ (то есть $\frac{\beta}{2}$), далее функция будет четной (симметричной) до угла β, и далее все повторится с периодом β.

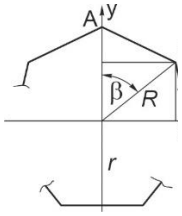


Рис. 2

Начнем с верхней части. Прямая AB задана общим уравнением

$$y = k{\cdot}x + b \tag{2}$$

Координаты точек таковы: A (0, R) и B ($R{\cdot}\sin\frac{\pi}{n}$, $R{\cdot}\cos\frac{\pi}{n}$). Подставляя их в уравнение (2), получаем:

$$k = -\frac{1-\cos\frac{2\pi}{n}}{\sin\frac{2\pi}{n}};\quad b = R \tag{3}$$

При повороте точки с координатами (x, y) вокруг начала координат на угол α новые координаты точки будут равны

$$x' = x\cos\alpha - y\sin\alpha$$

$$y' = x\sin\alpha + y\cos\alpha$$

откуда следует

$$x = x'\cos\alpha + y'\sin\alpha$$

$$y = -x'\sin\alpha + y'\cos\alpha$$

Подставляя величины x и y в уравнение (2), после преобразований получаем уравнение исходной прямой, повернутой на угол α:

$$y' = \frac{k + \operatorname{tg}\alpha}{1 - k\operatorname{tg}\alpha}\cdot x' + \frac{b}{\cos\alpha - k\cdot\sin\alpha} \tag{4}$$

Поскольку изгиб является прямым, максимальная ордината отсчитывается от центра тяжести вдоль силовой линии. Таким образом, ордината равна свободному члену уравнения (4) и зависимость верхней ординаты от угла поворота с учетом (3) будет иметь вид

$$y^+ = \frac{R}{\cos\alpha - \frac{1-\cos\frac{2\pi}{n}}{\sin\frac{2\pi}{n}}\cdot\sin\alpha} \qquad (5)$$

Формулу (5) нужно проверить на конечность возвращаемого значения, то есть убедиться, что правая часть никогда не будет равна бесконечности, а последнее произойдет в одном из следующих случаев:

1. $\sin\frac{2\pi}{n} = 0$ при $n = \infty$, что соответствует кругу, то есть тривиальному решению, которое мы не рассматриваем. Кроме того, можно показать, что $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1-\cos\frac{2\pi}{n}}{\sin\frac{2\pi}{n}} = 0$ и, таким образом, $\lim\limits_{n\to\infty} y^+ = R$;
2. $\sin\frac{2\pi}{n} = 0$ при $n = 2$, что противоречит условию $n \ge 3$;
3. $\cos\alpha - \frac{1-\cos\frac{2\pi}{n}}{\sin\frac{2\pi}{n}}\cdot\sin\alpha = 0$ приводит к условию $\operatorname{tg}\alpha = \frac{1-\cos\frac{2\pi}{n}}{\sin\frac{2\pi}{n}}$. Сравнив его с формулой (3), можно видеть, что речь идет об угловом коэффициенте прямой, но взятом с обратным знаком. Число равно себе же с обратным знаком только тогда, когда это число – нуль, но случай горизонтальной прямой разобран ниже.

Итак, перейдем к нижней ординате. Изначально она равна $-r$, а сторона многоугольника горизонтальна. Уравнение прямой записывается как $y = -r$, то есть $k = 0$, $b = -r$. Тогда из формул (1) и (4) следует (по модулю, поскольку знак ординаты роли не играет)

$$y^- = R\cdot\frac{\cos\frac{\pi}{n}}{\cos\alpha} \qquad (6)$$

Условие бесконечности возвращаемого значения $\cos\alpha = 0$ дает $\alpha = \frac{\pi}{2}$. Поскольку конечное значение изучаемого диапазона равно $\frac{\pi}{n}$, то угол α при $n \ge 3$ в него заведомо не входит.

Для построения графиков примем $n = 3$ (равносторонний треугольник). Верхний предел диапазона 60°, синяя кривая соответствует функции y^+, красная – y^-, по горизонтальной оси откладывается угол α в радианах, по вертикальной – максимальная ордината в долях R (Рис. 3). Кажется, что кривые симметричны относительно оси $\alpha = \frac{\pi}{2n} = 30°$. Они действительно симметричны независимо от n, но громоздкое доказательство симметрии опущено. До угла $\frac{\pi}{2n}$ максимальная ордината отсчитывается до верхней части фигуры, после – нижней, там же располагается опасная точка. Значит, оптимальный поворот балки, обеспечивающий наибольшую прочность – угол $\frac{\pi}{2n}$, причем его можно отсчитывать как от вершины, так и от стороны (Рис. 4). Иными словами: **балку надо располагать так, чтобы одна из ее граней была вертикальна при нечетном числе сторон и горизонтальна при четном**. Попутно отметим, что при оптимальном расположении сечения вместо одной опасной точки возникают две точки (при нечетном числе сторон) или даже два отрезка (при четном). Следовательно, при прочих равных условиях следует выбирать сечение с четным числом сторон.

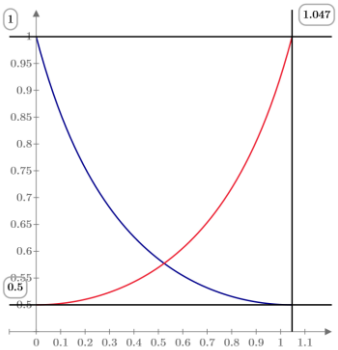


Рис. 3

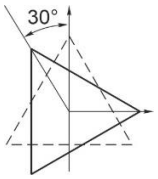


Рис. 4

Точка пересечения кривых на Рис. 3 имеет ординату $R\cdot\frac{\cos\frac{\pi}{n}}{\cos\frac{\pi}{2n}} = r\cdot\frac{1}{\cos\frac{\pi}{2n}}$. Для треугольника она равна $R\cdot\frac{\cos\frac{\pi}{3}}{\cos\frac{\pi}{6}} = R\cdot\frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{R}{\sqrt{3}} \approx 0.577\cdot R$, то есть выигрыш в прочности при таком расположении сечения составляет примерно 43%. Напомним, что для квадрата ($n = 4$) этот показатель достигает 41% и далее быстро убывает с ростом n. В частности, при $n = 11$ он входит в 3% «коридор» (Рис. 5) и вряд ли требует усилий по его достижению.

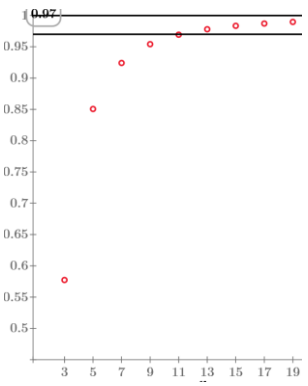


Рис. 5

Интересующиеся могут дополнить статью, представив аналитические доказательства следующих утверждений (при любых n):

- Условие 3 для формулы (5) никогда не выполняется в диапазоне $0\ldots\frac{\pi}{n}$;
- Функция (5) симметрична (четна) относительно оси $\alpha = \frac{\pi}{n}$;
- Функции (5) и (6) симметричны относительно оси $\alpha = \frac{\pi}{2n}$.