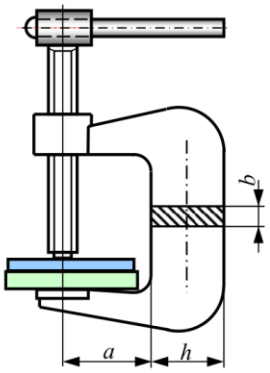
«Трансцендентное» квадратное уравнение

В учебнике [1] довелось встретить забавный пример решения задачи (Рис. 1).

Пример 8.8. (*Винокуров А. И.* Сборник задач … 5.38.).



Из расчета на прочность определить размер h скобы струбцины.

Решение. Условие прочности при внецентренном растяжении плоской фигуры

$$\sigma = \frac{F}{A} + \frac{M}{W} \le [\sigma],$$

где $A = b \cdot h$; $W = b \cdot h^2/6$; $M = F(a + h/2)$.

Условие прочности:

$$\sigma = \frac{F}{bh} + \frac{F(a+h/2)6}{bh^2} = \frac{F}{bh} + \frac{6Fa}{bh^2} + \frac{3Fh}{bh^2} \le [\sigma];$$

$$\frac{F}{h^2}\left(\frac{h}{b} + 6\frac{a}{b} + 3\frac{h}{b}\right) \le [\sigma]; \quad \frac{F}{h^2}\left(4\frac{h}{b} + 6\frac{a}{b}\right) \le [\sigma].$$

Требуемый размер скобы: $h \ge \sqrt{\frac{F}{[\sigma]}\left(4\frac{h}{b} + 6\frac{a}{b}\right)}$.

Рис. 1

В постановке задачи есть ссылка на задачник [2]. Там дана таблица с десятью вариантами исходных данных (F, $[\sigma]$, a, b), но ни решения, ни даже ответов автор не приводит. Это говорит о том, что данную задачу он считает не слишком сложной.

В самом деле, на скобу действует изгибающий момент с плечом $a + \frac{h}{2}$, сжимающий внешние (правые) слои, и растягивающая сила F. Опасные точки расположены на внутренней (левой) поверхности скобы, где растягивающие напряжения от силы и момента складываются. Формулу после слов «Условие прочности:» для прояснения физического смысла удобно преобразовать не так, как показано на Рис. 1, а следующим образом:

$$\frac{F}{bh}\left(1 + 6\frac{a}{h} + 3\right) = \frac{F}{bh}\left(6\frac{a}{h} + 4\right) = 2\frac{F}{bh}\left(3\frac{a}{h} + 1\right) \le [\sigma] \qquad (1)$$

Первое слагаемое в скобках – вклад момента, второе – силы. Все величины – положительные. Но для решения задачи ту же формулу лучше записать по-другому, умножив обе части на bh^2:

$$Fh + 6Fa + 3Fh \le [\sigma]bh^2 \rightarrow [\sigma]bh^2 - 4Fh - 6Fa \ge 0$$

Превращая неравенство в равенство, получаем квадратное уравнение относительно h с коэффициентами

$$A = [\sigma]b; \qquad B = -4F; \qquad C = -6Fa$$

$$D = B^2 - 4AC = 16F^2 + 24[\sigma]abF = 4\left(4F^2 + 6[\sigma]abF\right) > 0$$

$$h_1 = \frac{-B + \sqrt{D}}{2A} = \frac{4F + 2\sqrt{4F^2 + 6[\sigma]abF}}{[\sigma]b} = 2\frac{2F + \sqrt{4F^2 + 6[\sigma]abF}}{[\sigma]b}; \quad h_2 = 2\frac{2F - \sqrt{4F^2 + 6[\sigma]abF}}{[\sigma]b}$$

Второй корень уравнения можно сразу отбросить. Действительно, под квадратным корнем к слагаемому $4F^2$ прибавляется положительное число, значит, сам корень заведомо больше $2F$. Но потом корень вычитается из $2F$, то есть в числителе получаем отрицательное число, не подходящее для размера. Тогда единственная итоговая формула имеет вид

$$h = 2\frac{2F + \sqrt{4F^2 + 6[\sigma]abF}}{[\sigma]b} \qquad (2)$$

Остается подставить исходные данные в выражение для h (2) и на всякий случай проверить выполнение неравенства (1). Все, задача решена.

Однако авторы находят трудности там, где их нет - Рис. 2.

Размер ***h*** в обеих части неравенства. Полученное уравнение – трансцендентное. Решаем его методом последовательных приближений. В первом приближении принимаем ***h*** в скобках под корнем равным нулю: $h_0 = 0$. Тогда

$$h_1 = \sqrt{\frac{F}{[\sigma]}\left(4\frac{0}{b}+6\frac{a}{b}\right)} = \sqrt{\frac{16000}{90}\left(0+6\frac{90}{16}\right)} = 77{,}46 \text{ мм};$$

$$h_2 = \sqrt{\frac{16000}{90}\left(4\frac{77{,}46}{16}+6\frac{90}{16}\right)} = 97{,}17 \text{ мм}.$$

Невязка подбора $\frac{h_2 - h_1}{h_1}100 = \frac{97{,}17 - 77{,}46}{77{,}46}100 = 25{,}4\,\%$.

Следующее приближение $h_3 = \sqrt{\frac{16000}{90}\left(4\frac{97{,}17}{16}+6\frac{90}{16}\right)} = 101{,}58$ мм.

Невязка подбора $\frac{h_3 - h_2}{h_3}100 = \frac{101{,}58 - 97{,}17}{97{,}17}100 = 4{,}5\,\%$.

Следующее приближение $h_4 = \sqrt{\frac{16000}{90}\left(4\frac{101{,}58}{16}+6\frac{90}{16}\right)} = 102{,}54$ мм.

Невязка подбора $\frac{h_4 - h_3}{h_4}100 = \frac{102{,}54 - 101{,}58}{101{,}58}100 = 0{,}95\,\%$.

Последняя невязка менее 1 %, поэтому выходим из цикла подбора. Принимаем $h = 103$ мм.

Проверка:

$$\sigma = \frac{F}{A}+\frac{M}{W} = \frac{16000}{16\cdot 103}+\frac{16000\cdot 6}{16\cdot 103^2}\left(90+\frac{103}{2}\right); \quad \sigma = 9{,}71 + 80{,}03 = 89{,}74 \text{ МПа} < [\sigma].$$

Рис. 2

Напомним, что трансцендентное уравнение – это уравнение вида $f(x) = g(x)$, где функции f и g являются аналитическими функциями, и по крайней мере одна из них не является алгебраической. Аналитическая функция может быть представлена в окрестности каждой своей точки степенным рядом, а алгебраическая функция – элементарная функция, которая в окрестности каждой точки области определения может быть неявно задана с помощью алгебраического уравнения.

Примеры трансцендентных уравнений: $x = e^{-x}$; $\cos x = x$. Но в данном случае, как мы показали, все функции – элементарные.

Подтвердим сказанное, взяв те же исходные данные (в задачнике [2] это вариант №3), а именно: $F = 16$ кН, $[\sigma] = 90$ МПа, $a = 90$ мм, $b = 16$ мм, и по формуле (2) получим $h = 102.807$ мм (погрешность решения в [1] составляет 0.26%), и допускаемое напряжение – ровно 90 МПа (в [1] погрешность 0.29%). Но дело, конечно же, не в погрешностях, а в выдуманной «трансцендентности» уравнения, и, как следствие – в совершенно лишнем методе последовательных приближений.

1 Водопьянов В. И., Савкин А. Н., Кондратьев, О. В., Курс сопротивления материалов с примерами и задачами, ВолгГТУ, Волгоград, 2012

2 Винокуров А. И., Сборник задач по сопротивлению материалов, М., Высшая школа, 1990