**Приемы быстрого построения простейших эпюр**

*Час работы научит больше, чем день объяснений*
(*Ж.-Ж. Руссо*)

Почти все задачи, решаемые в курсе сопротивления материалов, требуют построения эпюр внутренних силовых факторов. Самым универсальным методом построения эпюр считается метод сечений. Однако подавляющее большинство эпюр являются настолько простыми, что применение метода сечений для их построения требует неоправданно больших затрат времени. В самом деле, однократное применение метода сечений нуждается по меньшей мере в одном рисунке и двух формулах. При этом даже для очень простой задачи (типа тех, что будут рассмотрены ниже) приходится делать три-четыре сечения. Известно, что при решении подобных задач львиная доля времени уходит не на обдумывание и вычисление, а на графические работы, то есть вычерчивание рисунков и запись формул. Метод сечений, являясь формальным, универсальным и мощным, удобен для решения или трудоемких задач на построение эпюр, или любых, но в начале, для накопления опыта. Но для простых задач при наличии минимальных навыков он представляется излишне громоздким и поэтому требует слишком больших затрат.

В то же время студентам, как правило, не объясняют упрощенные правила построения эпюр, а они, в свою очередь, не решают дополнительные задачи и не приобретают, таким образом, опыт быстрого получения ответа. Причем опыт этот не извлекается ни их книг, ни из лекций, а лишь накапливается путем самостоятельных упражнений.

В результате задача, которая легко может быть решена в уме за полминуты, решается на трех листах бумаги в течение получаса.

Это один из самых красноречивых примеров неоправданных затрат сил и главное – времени. Ниже будут даны некоторые советы по построению простейших эпюр вообще без использования метода сечений или, в крайнем случае, с его минимальным использованием. Подобные задачи требуют для решения очень небольшого времени (не более 40 секунд).

Все задачи должны решаться исключительно мысленно, без каких-либо дополнительных письменных построений или расчетов (кроме случаев, которые будут оговариваться особо).

## Растяжение-сжатие колонн

*Задача* 1. Рассмотрим пример Рис. 1. Требуется построить эпюру нормальной силы *N*.

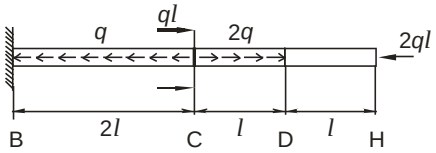


Рис. 1

Прежде всего рекомендуется найти реакцию заделки. На самом деле, для построения эпюры это не обязательно, однако позволяет провести проверку решения.

Реакция заделки есть сила, необходимая для равновесия колоны, то есть для того, чтобы сумма проекций всех сил на ось колонны равнялась нулю. Вначале просуммируем все силы, проекция которых на ось направлена вправо. Двигаясь взглядом вдоль оси колонны, будем отмечать только те вектора, которые имеют выбранное нами направление (вправо). Это сила $ql$ в сечении C и распределенная нагрузка интенсивностью $2q$ на участке CD. Первый внешний силовой фактор проецируется на ось «как таковой» и его вклад в результат составляет $ql$. Величина второй силы, направленной вправо, получается умножением интенсивности нагрузки $2q$ на длину участка $l$. Следовательно, равнодействующая всех сил, направленных вправо, равна $1 + 2\cdot1 = 3$ (здесь и далее множитель $ql$ для простоты опускается).

Запомним цифру «3» и перейдем к силовым факторам, направленным влево. Их тоже два – распределенная нагрузка на участке BC и сила на торце. Действуя по той же методике, имеем: $1\cdot2 + 2 = 4$. Сравнивая полученную цифру 4 с запомненной 3, делаем вывод о том, что равнодействующая сил, направленных влево, больше. Следовательно, для соблюдения равновесия всей колонны реакция заделки должна быть направленной вправо. Мысленно отбрасывая заделку и прикладывая вместо нее на левом торце вектор силы, направленный вправо, видим, что такая сила создает сжатые слои вблизи заделки. Сжатию в механике приписывается знак «минус», значит, на левом конце эпюры значение усилия будет отрицательным. Модуль же реакции составляет $4 – 3 = 1$.

К этому выводу можно прийти и другим путем. Силы, направленные вправо, являются растягивающими, их равнодействующая, как мы уже знаем, равна 3. Силы, направленные влево, то есть сжимающие, дают равнодействующую с модулем 4. Следовательно, сжимающие силы «победят» растягивающие и создадут в заделке такую же, как они сами, сжимающую силу модулем $4 – 3 = 1$.

На этом подготовительные операции (определение величины и знака реакции заделки) закончены, можно переходить к построению эпюры.

Начинать удобно с левого конца. Сразу проставляем значение $–ql$, которое мы вычислили на подготовительном этапе (Рис. 2, *а*).

Далее, начинается участок BC с распределенной нагрузкой, направленной влево. Распределенная нагрузка дает на эпюре усилий наклонную прямую. Осталось выяснить направление этого наклона. Иначе говоря – пойдет эпюра вверх или вниз. Для решения этого вопроса удобно воспользоваться следующим приемом. Любая внешняя нагрузка, распределенная или сосредоточенная, направленная влево, создает сжатие слева и растяжение справа. Это можно понять, представив себе стержень из податливого материала (например, поролона), закрепленного двумя концами. Мысленно возьмем его рукой посередине и передвинем руку влево. Слева от силы стержень сожмется, справа – растянется.

Поскольку на сжатых участках действует отрицательное усилие, а на растянутых – положительное, направление силы влево соответствует наклону эпюры от меньших значений к бóльшим, то есть вверх, если двигаться по оси слева направо. Таким образом, от начального значения –1 эпюра будет увеличивать ординаты.

Длина участка BC равна 2, интенсивность нагрузки равна 1, то есть общая величина подъема эпюры составит 2·1 = 2. Считаем –1 + 2 = 1, то есть ордината эпюры в сечении C равна $ql$ (Рис. 2, *б*).

В том же сечении C действует сосредоточенная сила, направленная вправо. Сосредоточенной силе всегда соответствует «скачок», то есть резкое изменение ординаты, причем величина скачка равна модулю силы. Открытый пока вопрос о направлении скачка – вверх или вниз – решается так же, как и раньше: раз сила направлена вправо, то создает сжатие (меньшие усилия) справа и растяжение (бóльшие) слева. Скачок, следовательно, будет отрицательным, то есть вниз, на величину 1, и ордината уменьшится до 1 – 1 = 0 (Рис. 2, *в*).

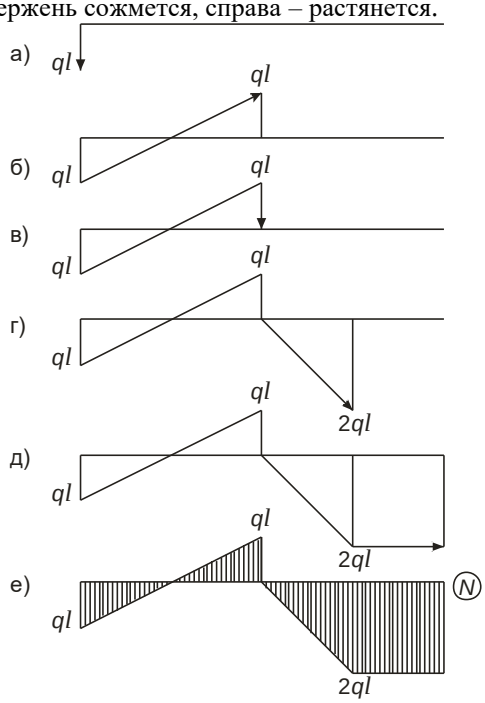


Рис. 2

Можно получить тот же вывод и упрощенно: сила направлена противоположно распределенной нагрузке на первом участке, и если последняя привела к росту усилия, то сила приведет к ее убыванию, то есть к скачку вниз. Или так: сила вправо на торце (сечение B) дала скачок вниз, значит, так же поступит и другая сила, направленная в ту же сторону, но приложенная в сечении C.

На участке CD распределенная нагрузка направлена не влево, как на первом, а вправо. Значит, по той же причине ординаты будут меняться не в бóльшую, а в меньшую сторону. Однако интенсивность нагрузки вдвое больше, значит, спуск будет вдвое круче, чем подъем. На длине 1 величина спуска составит 1·2 = 2, и ордината станет равной 0 – 2 = –2 (Рис. 2, *г*).

На участке DH распределенной нагрузки нет, следовательно, эпюра будет горизонтальной (Рис. 2, *д*).

Получилось, что в сечениях, близких к торцу колонны, усилие равно $-2ql$. Мысленно отсекая от торца сколь угодно короткий участок, видим, что вследствие сжимающей силы, приложенной к торцу, усилие в сечении тоже будет сжимающим, то есть отрицательным, и равным по модулю 2, что совпадает с построенной эпюрой. Проверка сошлась.

Слово «отсекая» выше предполагает применение метода сечений. Но, во-первых, требуется это лишь на первых порах (а в идеале – один раз). Во-вторых, такой простой рисунок, всего с двумя сосредоточенными силовыми факторами (а это вообще наименьшее число сил, необходимых для равновесия), представить мысленно, без материального графического образа, совсем нетрудно.

Даже небольшой опыт построения эпюр очень быстро позволяет понять простую закономерность: вне зависимости от вида нагружения на торце стержня внутренний силовой фактор по модулю и по знаку совпадает с соответствующим внешним. В рассматриваемом случае это сжимающая сила $ql$ на левом торце, дающая ординату $-ql$ на эпюре, и то же, но с модулем 2 – на правом.

Итак, остается заштриховать эпюру и снабдить ее обозначением нормальной силы (Рис. 2, *е*). Задача решена.

Напомним, что при накоплении некоторых навыков в построении эпюр можно опустить подготовительный этап, связанный с определением реакции заделки. Тогда построение эпюры выполняется не слева направо, а в противоположном направлении. Преимущество такого приема состоит в сокращении времени на решение, а недостаток – в отсутствии достаточно надежной проверки.

В завершение темы предлагается самостоятельно решить две аналогичные задачи (Рис. 3). Эпюры изображены под соответствующими расчетными схемами.

Рекомендуется, не глядя на ответ, перерисовать расчетные схемы, засечь время и приступить к построению эпюр. Оно должно быть выполнено за максимальное время 40 секунд на каждую задачу и без промежуточных рисунков и формул.

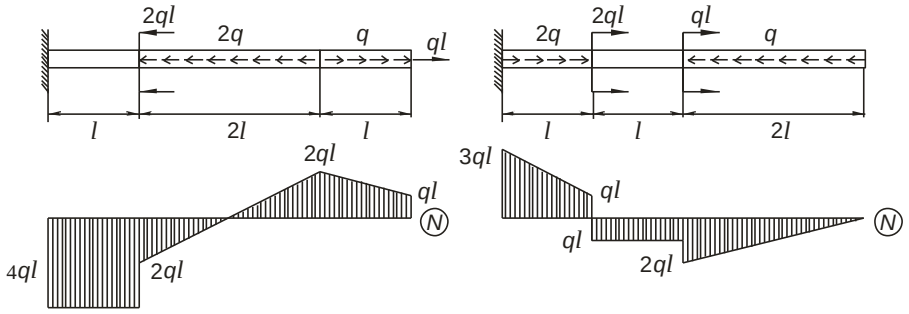



Рис. 3

## Изгиб балок

*Задача* 2. Дана балка (Рис. 4, *а*). Построить эпюру изгибающего момента $M_x$.

Обратим внимание, что построение эпюры поперечной силы при изгибе имеет смысл только для проверки эпюры моментов. В целях экономии времени мы будем опускать этот этап, выполняя необходимые проверки другими способами.

Построение эпюр моментов для расчетной схемы типа «консоль» удобно начинать с определения момента в заделке, при этом нахождения вертикальной реакции заделки, как правило, не требуется. Все промежуточные расчеты, вплоть до окончательной эпюры, следует также выполнять в уме.

Итак, мысленно отбрасываем заделку, заменяя ее действие на момент и силу (Рис. 4, *б*). Направление обоих силовых факторов выбираем так, чтобы на эпюрах их значения откладывались вверх, согласно правилу знаков при изгибе.

Следующим шагом заменяем (опять же мысленно) распределенную нагрузку на сосредоточенную равнодействующую. Величина последней должна равняться произведению интенсивности распределенной нагрузки на длину участка, на котором она действует.

Такое же правило справедливо и при рассмотренном ранее растяжении-сжатии, и даже при кручении, которое мы пропустили, ибо построение эпюры крутящих моментов полностью, с точностью до обозначений, идентично построению эпюр усилий.

Итак, в рассматриваемой задаче сосредоточенная равнодействующая равна произведению $q$ на $l$, то есть $ql$. Интуитивно понятно, что она будет приложена в середине участка, однако это можно доказать строго, путем интегрирования.

Таким образом, получаем расчетную схему Рис. 4, *в*. Равнодействующая является фиктивной, поэтому показана пунктиром. Следующим шагом является составление уравнения моментов с целью определения реактивного момента $M$. Удобно составлять сумму моментов относительно точки А – это позволит исключить из уравнения силу $Q$. Момент равнодействующей равен произведению ее величины $ql$ на указанное на рисунке плечо $\frac{l}{2}$. Получаем $\frac{ql^2}{2}$. Направление этого момента отрицательно, поскольку оба момента изначально были направлены по часовой стрелке (относительно точки А), что противоречит уравнению статики.

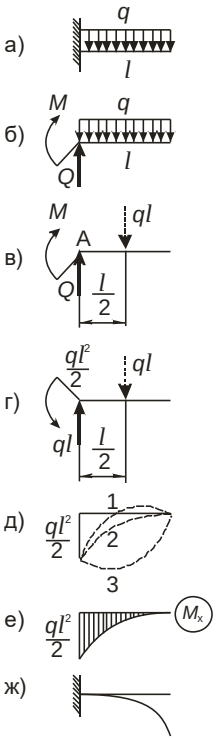



Рис. 4

Окончательно получаем расчетную схему Рис. 4, г. Балка находится в равновесии. Попутно найдем (из проекции на вертикаль) реактивную силу, хотя для построения эпюры моментов она не понадобится.

Выведенную формулу реактивного момента $\frac{ql^2}{2}$ следует запомнить. Например, если нагрузка интенсивностью $3q$ действует на длине $\frac{l}{2}$, то реактивный момент будет равен $3q\frac{\left(\frac{l}{2}\right)^2}{2} = \frac{3\cdot\frac{1}{4}}{2}ql^2 = \frac{3}{8}ql^2$.

Теперь перейдем к построению эпюры. Известно, что если на участке действует распределенная нагрузка, то эпюра этого участка будет параболической. Значения момента на концах балки

найдены: $-\frac{ql^2}{2}$ в точке А и нуль на торце. Это – результат применения все того же правила: на торце внутренний силовой фактор равен внешнему.

Однако соединить намеченные крайние точки параболой можно несколькими способами (Рис. 4, *д*).

Выпуклость параболы – вверх или вниз – определяется простым математическим соображением. Распределенная нагрузка направлена вниз, то есть ее проекция на ось *y* отрицательна. Следовательно, эпюра будет подобна параболе вида $y = -x^2$, а последняя имеет максимум и выпуклость вверх. Таким образом, исключается кривая 3 как возможная форма эпюры.

Координата экстремума функции определяется точкой, где ее производная равна нулю. Производная изгибающего момента – это поперечная сила, а она равна нулю на торце балки, что можно установить отсечением сколь угодно малого участка от торца и проецированием сил на вертикаль. Значит, исключается форма эпюры, отмеченная цифрой 1. Единственно возможной формой является кривая 2. Осталось заштриховать эпюру и присвоить ей обозначение $M_x$ (Рис. 4, *е*). Задача решена.

В данном простом случае выбор формы эпюры между вариантами 1 и 2 можно сделать без рассуждений об экстремуме и производной, а исходя из приближенной формы изогнутой оси. Легко вообразить, что эта форма будет иметь вид Рис. 4, *ж*, то есть сжатые слои на всей балке будут располагаться снизу. Кривая 1 этому требованию не удовлетворяет, и единственным вариантом остается кривая 2. Проверка сошлась.

*Задача* 3. Дана балка Рис. 5, а. Построить эпюру $M_x$.

Прежде всего, очевидно, что на обоих концах балки, свободных от внешних моментов, эпюра $M_x$ будет иметь нулевые значения – ставим точки (Рис. 5, *б*).

Далее, нетрудно представить, что сжатые слои будут располагаться только сверху, а максимальный момент возникнет под силой, поэтому можно поставить точку сверху оси. И, наконец, на участках между шарнирными опорами и силой нет ни распределенных, ни сосредоточенных нагрузок, так что три намеченные точки соединяются прямыми линиями (Рис. 5, *в*).

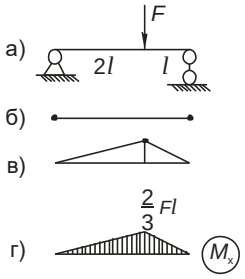


Рис. 5

Осталось лишь найти величину максимального момента. Для этого мысленно отбросим любую опору (допустим, правую) и заменим ее реактивной силой $R_2$. Ее плечо относительно левой опоры будет $3l$, а плечо силы $F$ равно $2l$. При этом, исходя из уравнения равновесия, моменты этих сил будут равны. Решаем (опять же в уме) уравнение $F \cdot 2l = R_2 \cdot 3l$, откуда следует $R_2 = \frac{2}{3}F$. К тому же выводу можно прийти иным путем: сила $R_2$ во столько же раз меньше силы $F$, во сколько плечо $3l$ больше $2l$.

На правом участке балки длиной $l$ сила $R_2$ создаст момент $\frac{2}{3}F \cdot l = \frac{2}{3}Fl$ – это и есть искомый момент под силой. Штрихуем эпюру и пишем ее обозначение (Рис. 5, *г*). Задача решена.

Проверка может заключаться в отбрасывании теперь левой опоры, замене ее реакцией $R_1$ и составлении уравнения равенства моментов относительно правой опоры. Очевидно, что $R_1 = \frac{1}{3}F$, а момент ее $\frac{1}{3}F \cdot 2l = \frac{2}{3}Fl$. Проверка сошлась.

Наконец, еще одна проверка состоит в проецировании всех трех сил на вертикаль (положительное направление, допустим, вверх). Имеем $R_1 + R_2 - F = \frac{1}{3}F + \frac{2}{3}F - F = 0$. Дополнительная проверка тоже сошлась.

*Задача* 2 и *Задача* 3, решенные выше, могут рассматриваться как «базовые», «примитивные» или «основные». Другие подобные расчетные схемы показаны на Рис. 6. Они очень часто возникают как части более сложной задачи. Рекомендуется один раз решить каждую из базовых задач и запомнить полученные результаты, подобно тому, как мы учим наизусть таблицу умножения, чтобы не вычислять произведения каждый раз. Тогда решение сложной задачи распадается на совокупность решений простых. При этом время на каждую из этих задач не должно превышать примерно 10 секунд, которые тратятся именно на изображение эпюры на бумаге. Чем шире «арсенал» подобных базовых решений, тем более быстрым, простым и безошибочным будет построение эпюр для более трудоемких задач.

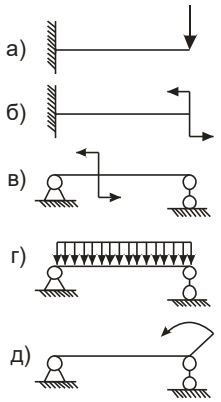


Рис. 6

*Задача* 4. Дана балка Рис. 7, *а*. Построить эпюру $M_x$.

Рассмотрение расчетных схем с двумя и более силовыми факторами удобно

проводить по принципу суперпозиции. При этом решение каждой из отдельных задач оказывается либо совсем простым, либо известным по одному из предыдущих решений. Таким образом, на вид сложная задача зачастую решается неожиданно легко.

Мысленно отделим распределенную нагрузку и момент друг от друга и приложим к балке независимо. Необходимо построить эпюры от их действия по отдельности и затем сложить.

Консоль, нагруженную распределенной нагрузкой, мы уже рассматривали (*Задача* 2). Осталось найти момент в заделке: $q\cdot\frac{(3l)^2}{2}=q\cdot\frac{9l^2}{2}=\frac{9}{2}ql^2$ (Рис. 7, *б*).

Построение эпюры для консоли, нагруженной сосредоточенным моментом (Рис. 6, *б*), еще проще – Рис. 7, *в*.

Эпюры Рис. 7, *б* и Рис. 7, *в* не заштрихованы, потому что, во-первых, являются фиктивными, а во-вторых, должны быть выполнены в воображении, а не на бумаге.

Построение итоговой эпюры на участке BC трудностей не вызывает – она полностью совпадает с таковой для одной распределенной нагрузки (Рис. 7, *б*).

Для сложения эпюр на участке AB необходимо найти ординату первой из них в сечении B. Действительно, если эта ордината по модулю меньше $3ql^2$, то сжатые слои слева от сечения B располагаются сверху, и наоборот.

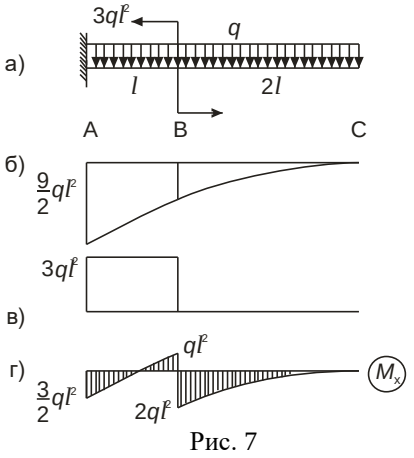


Рис. 7

Ординату найдем по формуле, которую нам дала *Задача* 2. В самом деле, участок BC можно рассматривать как отдельную консольную балку длиной $2l$, и момент в сечении B ищется так же, как в заделке. Имеем: $q\cdot\frac{(2l)^2}{2}=q\cdot\frac{4l^2}{2}=2ql^2$. Так как два меньше трех, эпюра слева от сечения B будет располагаться сверху оси.

При переходе через сечение B из-за сосредоточенного момента на эпюре наблюдается скачок на $3ql^2$. Направление скачка можно установить множеством способов, один из самых простых – черновая (промежуточная) эпюра Рис. 7, *в*. Момент слева от сечения B, выраженный в единицах $ql^2$, будет равен –2 + 3 = 1.

Момент в заделке также легко вычисляется по принципу суперпозиции: $-\frac{9}{2}+3=-\frac{3}{2}$.

Окончательный вид эпюры показан на Рис. 7, *г*.

*Задача* 5. Дана балка Рис. 8, *а*. Построить эпюру $M_x$.

Рассматриваемая задача также относится к таким, которые, будучи по первому впечатлению весьма трудоемкими, оказываются при ближайшем рассмотрении довольно простыми.

Вновь применим принцип суперпозиции и начнем с распределенной нагрузки, как с самого сложного внешнего силового фактора. Который уже раз применяем формулу для момента в заделке консольной балки, на которую действует распределенная нагрузка: $2q\cdot\frac{(2l)^2}{2}=4ql^2$. Учитывая, что сжатые слои, очевидно, находятся сверху, мысленно строим первую эпюру Рис. 8, б. Волнистая линия символизирует то, что вид первой фиктивной эпюры на участке AB нас не интересует. Эта мысль будет разъяснена ниже.

Теперь строим фиктивную эпюру от второго силового фактора – вертикальной силы в сечении C (Рис. 8, *в*). Максимальный момент есть произведение силы на плечо, что есть $ql\cdot 2l = 2ql^2$.

Рассматривать третий силовой фактор – момент в сечении A – для построения эпюры на участке BC нет никакой необходимости, так как эта эпюра будет представлять собой тождественный нуль.

Осталось только сложить промежуточные эпюры и получить окончательный результат для участка BC – Рис. 8, *г*.

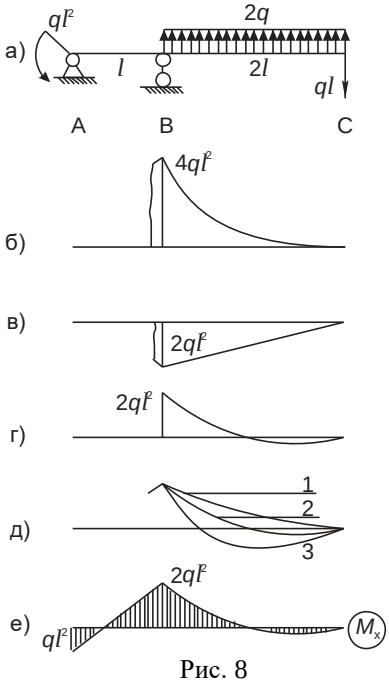


Рис. 8

Поскольку проекция распределенной нагрузки на ось $y$ положительна, то парабола напоминает график функции $y = x^2$, то есть расположена выпуклостью вниз.

Почему для эпюры была выбрана кривая 2 (Рис. 8, *д*), а не 1 или 3? Иными словами – как быстро найти точку, где эпюра пересекает ось, и положение экстремума? Для данной задачи эти вопросы не

так просты, как построение эпюры, и могут занять примерно такое же время. К тому же эти вопросы, как правило, выходят за рамки темы построения элементарных эпюр. Тем не менее, ответить на них, не совершая сложных расчетов, вполне возможно.

Координату первого сечения ищем из того условия, что изгибающий момент в нем равен нулю. А это может быть только в том случае, когда момент, создаваемый распределенной нагрузкой, в точности равен моменту от силы, приложенной в точке C.

Допустим, искомая координата $\zeta$ сечения, отсчитанная от точки C влево, найдена. Тогда момент от распределенной нагрузки равен $2q\frac{\zeta^2}{2}=q\zeta^2$ (сжатые слои сверху), а от силы $-ql\cdot\zeta$ (снизу). По условию моменты равны. Приравнивая моменты по модулю, находим $\zeta = l$. Ответ на первый вопрос получен.

Ответ на второй вопрос (экстремум) еще проще. Как показала *Задача* 2, экстремум момента достигается в точке, где поперечная сила равна нулю. Вновь мысленно отсекая от балки часть слева от сечения C, видим, что поперечная сила будет суммой переменной силы, порожденной распределенной нагрузкой и направленной вверх, и постоянной силы $ql$ на торце (вниз). По условию силы равны. Следовательно, равнодействующая распределенной нагрузки равна $ql$. Учитывая, что интенсивность распределенной нагрузки есть $2q$, видим, что расстояние от точки C до точки экстремума равно $\frac{l}{2}$. Ответ на второй вопрос также ясен, и можно с полным основанием строить эпюру на участке BC (Рис. 8, *г*).

Осталось построить эпюру на участке AB. Как уже указывалось, для решения этой части задачи мы не принимаем в расчет ни распределенную нагрузку, ни силу, хотя это очень легко сделать. Объяснение состоит в том, что вне зависимости от того, как нагружен участок BC (и даже, есть ли еще участки справа от сечения C), для участка AB будут незыблемыми следующие положения:

- В сечении A момент равен $ql^2$ и сжимает нижние слои;
- На участке AB эпюра линейна.

Умение игнорировать факторы, которые не влияют на результат, также позволяет сократить и упростить решение.

Таким образом, построение эпюры на участке AB выполнятся очень просто. Находим момент в сечении B (мы его уже нашли, он равен 4 – 2 = 2: Рис. 8, *г*), затем откладываем отрицательный момент с модулем 1 в сечении A и соединяем прямой две полученные точки. Выполняем штриховку эпюры и пишем ее обозначение (Рис. 8, *е*). Задача решена.

В рамках темы построения эпюр балок следует отдельно рассмотреть расчетные схемы с врезанными шарнирами (также называемыми внутренними или промежуточными). Навыки работы с врезанными шарнирами требуются не только в теме «Построение эпюр», но и при последующем изучении статически неопределимых балок и плоских рам, где умелое применение врезанных шарниров существенно упрощает решение задач.

Под врезанным шарниром понимается сечение стержня, в котором разрешен взаимный поворот сечений, находящихся по одну и по другую сторону от шарнира. Как следствие, внутренний изгибающий момент во врезанном шарнире всегда равен нулю.

*Задача* 6. Дана балка (Рис. 9, *а*). Построить эпюру $M_x$.

В заделке возникают две реакции – момент и вертикальная сила (здесь и далее горизонтальные силы не рассматриваются, поскольку из суммы проекций на горизонталь видно, что соответствующая реакция заделки равна нулю). Кроме того, в шарнире D также возникает реакция – итого 3 неизвестных. Число уравнений, на первый взгляд, равно двум – сумма проекций сил на вертикаль и сумма моментов.

Разрежем балку в произвольном сечении на участке BC - Рис. 9, *б*. Вместо неизвестных внешних силовых факторов – реакций заделки – возникают два внутренних: изгибающий момент $M_x$ и поперечная сила $Q_y$. Суть остается прежней – для определения трех неизвестных мы располагаем всего двумя уравнениями равновесия.

Ситуация меняется, если в качестве сечения, в котором мы разрезаем балку, выбрано сечение B. Момент в нем равен нулю, значит, получаем на одну неизвестную меньше. Правда, поперечная сила во врезанном шарнире по-прежнему

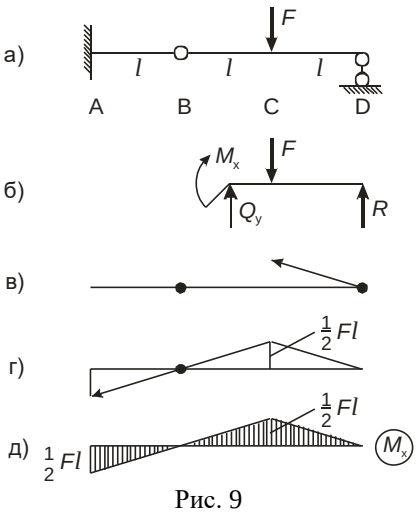



Рис. 9

неизвестна и в общем случае отлична от нуля, но это ограничение легко обойти так же, как и раньше – составив уравнение моментов относительно точки приложения этой силы, то есть относительно врезанного шарнира. Отсюда следует простое правило:

Сумма моментов всех силовых факторов, находящихся по одну сторону от врезанного шарнира, относительно последнего, равна нулю.

Таким образом, для данной балки можно составить четыре уравнения – суммы моментов слева и справа от B, сумма проекций на вертикаль и сумма моментов относительно любой точки. Три из этих уравнений обычно используются для определения неизвестных, а четвертое – для проверки. Что же касается данной, очень простой, задачи, то для ее решения потребуется всего одно уравнение – сумма моментов справа от шарнира B.

Внешняя сила $F$ создает момент на плече $l$ по часовой стрелке. Значит, реакция шарнира D должна создавать такой же момент против часовой, то есть, быть направленной вверх и равняться $\frac{F}{2}$, поскольку ее плечо BD равно $2l$. Момент, создаваемый этой силой на плече CD, равен $\frac{F}{2}\cdot l=\frac{1}{2}Fl$. Сжатые слои – сверху.

В шарнирах B и D изгибающий момент равен нулю – ставим точки и проводим линию Рис. 9, *в*. Далее рассуждаем следующим образом – на участке BC нет внешних силовых факторов, значит, эпюра момента будет прямой. Кроме того, она должна пройти через поставленную точку во врезанном шарнире. Но куда она пойдет дальше? Скачка на эпюре не будет – в сечении B не приложен сосредоточенный момент. Аналогично, перелома на эпюре также не ожидается, поскольку в шарнире B не приложена и сила. Значит, эпюра пойдет как шла и достигнет в заделке той же величины – $\frac{1}{2}Fl$, но не сверху, а снизу от оси: Рис. 9, *г*. Штрихуем эпюру и пишем ее обозначение (Рис. 9, *д*). Задача решена.

Если возникли сомнения в правильности построения эпюры, можно провести несколько проверок. Для начала найдем вертикальную реакцию в заделке. На участке AB эпюра возрастает, следовательно, искомая сила направлена вверх. Она заставляет момент увеличиться с $-\frac{1}{2}Fl$ до $\frac{1}{2}Fl$, то есть на $\frac{1}{2}Fl-\left(-\frac{1}{2}Fl\right)=Fl$. Происходит это возрастание на участке AC длиной $2l$, то есть величина силы равна $\frac{Fl}{2l}=\frac{F}{2}$. На пару с реакцией шарнира D эта сила дает проекцию $\frac{1}{2}F+\frac{1}{2}F=F$ вверх, что уравновешивается внешней силой той же величины, направленной вниз. Проверка сошлась.

Ну и, наконец, просуммируем относительно врезанного шарнира силовые факторы, расположенные слева от него. Силовая реакция заделки дает $\frac{F}{2}\cdot l=\frac{1}{2}Fl$ и сжимает верхние слои. Следовательно, момент в заделке должен иметь ту же величину и сжимать нижние слои, что соответствует построенной эпюре. Проверка сошлась.

На Рис. 10 даны три расчетных схемы с соответствующими эпюрами. Как и ранее, следует убедиться, что построение каждой из эпюр возможно не более чем за 40 секунд и при исключительно мысленном проведении вспомогательных расчетов и построений. Для начала можно опустить вычисление значений экстремумов парабол и координат этих экстремумов (показаны оранжевым цветом). Важно лишь правильно изобразить форму эпюры, значения моментов на границах участков, и направление вогнутости параболы.

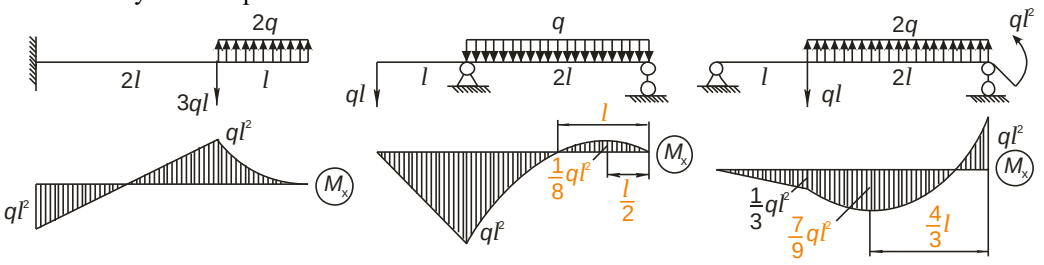



Рис. 10

**Плоские рамы**

*Задача* 7. Дана рама (Рис. 11, *а*). Построить эпюру $M_x$.

В неподвижном шарнире A будут возникать две реакции – горизонтальная и вертикальная. В подвижном шарнире C – одна вертикальная реакция. Она-то и понадобится нам для построения эпюры.

Рассмотрим сумму моментов относительно точки A. Такой выбор позволяет исключить сразу две силы (реакции в шарнире A) из уравнения моментов. Этим приемом мы неоднократно пользовались раньше. Отсюда следует рекомендация: уравнение моментов следует составлять относительно точки, где приложено наибольшее число неизвестных сил.

Таким образом, в уравнение моментов войдет опять же минимальное число слагаемых: внешняя сила $F$, создающая на плече AB момент $F \cdot 2l$ (по часовой стрелке), и неизвестная реакция в шарнире C. Из равенства моментов по величине следует, что модуль неизвестной силы будет во столько раз больше $F$, во сколько раз плечо AB больше плеча BC, то есть $2F$. А из условия суммы всех моментов нулю следует, что реакция шарнира C направлена именно вверх (Рис. 11, *б*).

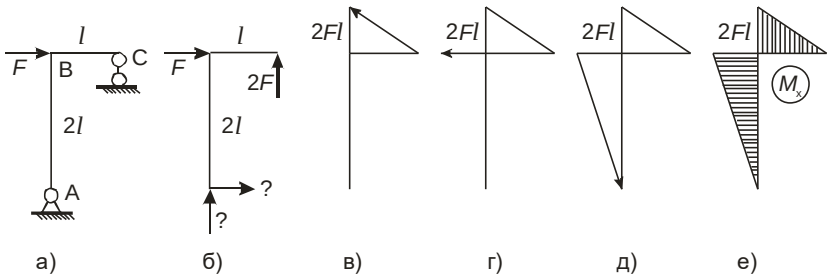



Рис. 11

Обратим внимание: мы составили всего одно уравнение равновесия из трех возможных. И пусть оставшиеся два (проекции на горизонталь и вертикаль) очень просты, в них просто нет необходимости для построения эпюры. Именно поэтому вместо реакций шарнира A на Рис. 11, *б* стоят знаки вопроса.

Найденная сила создает сжатые слои сверху на участке BC. Максимальный момент достигается, естественно, на наибольшем удалении от точки приложения силы, и равен $2F \cdot l = 2Fl$ (Рис. 11, *в*).

Известно, что изгибающий момент по величине и расположению сжатых слоев с одной стороны от узла равен моменту с другой стороны при отсутствии внешнего момента в самом узле (правило, известное как «с чем пришел – с тем ушел»). Отметим, что это правило, следующее просто из условия равновесия узла, есть еще одна попытка избавиться от изображения лишних рисунков и составления ненужных уравнений.

Итак, согласно данному правилу изображаем на эпюре момент на участке AB близ узла B (Рис. 11, *г*). Затем остается учесть, что, во-первых, на участке AB нет ни распределенных, ни сосредоточенных сил, и во-вторых, к шарниру A не приложено внешних моментов. Таким образом, проводим прямую линию от текущего значения в узле B до нуля в точке A (Рис. 11, *д*). Штрихуем и обозначаем эпюру (Рис. 11, *е*). Задача решена.

Если возникнет необходимость в проверках, вернемся к Рис. 11, *б*. Составлять уравнение проекций на вертикаль по-прежнему нет нужды, а вот на горизонталь дадут проекции только внешняя сила $F$ (вправо) и реакция шарнира A. Значит, эта реакция направлена противоположно (влево) и также равна $F$. Тогда ее момент на плече AB, длина которого равна $2l$, составит $F \cdot 2l = 2Fl$, что соответствует построенной эпюре. Проверка сошлась.

*Задача* 8. Дана рама (Рис. 12, *а*). Построить эпюру $M_x$.

Решение задач с врезанными шарнирами, как показала *Задача* 6, упрощается тем, что расчетная схема распадается на участки, разделенные этими шарнирами, в которых эпюра обнуляется. Фигурально выражаясь, эпюра не может «перескочить» через врезанный шарнир.

Начинать построение эпюры с участка AC неразумно: в шарнире A возникают две реакции, а уравнение равновесия можно составить лишь одно (сумма моментов справа от узла C). Лучше начать с участка CD – вертикальная реакция в шарнире D в уравнение моментов не войдет. Участок CD представляет собой даже не раму, а балку, более того – одну из базовых балок (Рис. 6, *в*). Поэтому эпюра для нее строится без объяснений в расчете на самостоятельное решение.

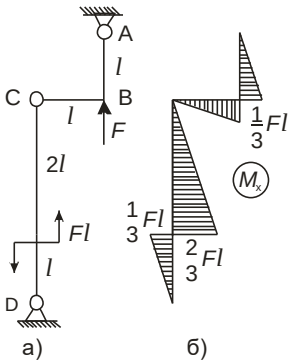



Рис. 12

Из этого решения, в частности, следует, что горизонтальная реакция в шарнире D равна $\frac{1}{3}F$ и направлена влево. Поскольку горизонтальных нагрузок на раму нет, то из условия равновесия в проекциях на горизонталь для всей рамы следует, что в шарнире A горизонтальная реакция также равна $\frac{1}{3}F$ и направлена вправо. Строим эпюру для участка AC, изображаем обе эпюры на оси рамы, штрихуем и снабжаем результат обозначениями - Рис. 12, *б*. Задача решена.

Незамеченным остался парадоксальный, на первый взгляд, тот факт, что сила $F$ никак на результат не повлияла. В самом деле, изменив ее величину и/или направление, да и просто убрав ее, мы получим ту же эпюру.

В действительности никакого парадокса нет – у нас просто не возникло нужды ни в уравнении проекций на вертикаль, ни в суммировании моментов относительно шарнира C для верхней части рамы. Если же эти уравнения все же составить, то станет ясно: изменение величины силы повлияет лишь на растягивающие и сжимающие усилия на участках AB и CD, а эпюры нормальных сил в плоских рамах, как правило, не строятся.

*Задача* 9. Дана рама (Рис. 13, *а*). Построить эпюру $M_x$.

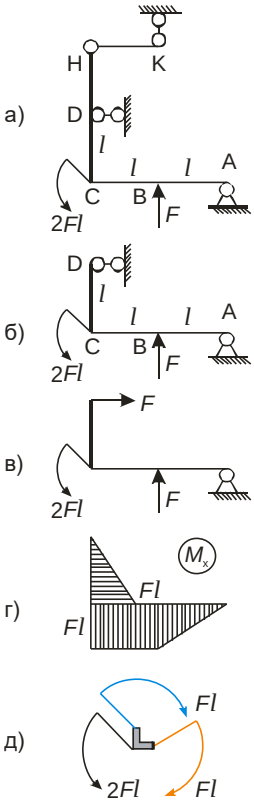


Рис. 13

На первый взгляд задача кажется чрезвычайно сложной. Два силовых фактора, четыре шарнира, один из которых – врезанный, пять участков изменения момента... Однако нам предстоит увидеть, что в действительности данная задача имеет почти такую же сложность, что и *Задача* 7.

Прежде всего, рассмотрим участок HK. Отбросив шарнир K, заменим его реакцией, безразлично как направленной. Теперь составим уравнение моментов относительно точки H. В это уравнение войдет единственное слагаемое – произведение реакции на плечо HK. Однако сумма моментов должна быть равна нулю! Поскольку плечо явно отлично от нуля, значит, отсутствует реакция шарнира K. Участок HK, следовательно, свободен от каких-либо нагрузок. Но тогда выходит, что и на участок DH не действует никаких сил!

Таким образом, можно без всякого ущерба для результата проигнорировать чуть ли не половину расчетной схемы – участки DH и HK. Задача заметно упрощается – Рис. 13, *б*.

Разумеется, это перестроение также следует выполнять в уме. Глядя на исходную расчетную схему, надо заставить себя «перестать видеть» участки выше сечения D.

Путь к оптимальному решению подскажет сделанная *Задача* 6 – составим уравнение моментов относительно неподвижного шарнира A. При этом нас по-прежнему не интересуют реакции этого шарнира. Внешний момент $2Fl$ направлен против часовой стрелки, момент внешней силы есть $F \cdot l = Fl$, и направлен он по часовой.

Здесь уместно вспомнить еще одно полезное правило (применимое и в обыденной жизни): «Слабым надо помогать». В данном случае момент от силы «слабее» внешнего момента на величину $2 - 1 = 1$ (в долях $Fl$). «Помощь» может обеспечить только реакция шарнира D. Значит, ее надо направить так, чтобы она создавала момент в том же направлении, что и «слабый» момент силы $F$, то есть вправо. Плечо этой силы относительно точки A есть длина участка CD, то есть $l$. Значит, реакция шарнира D такова, как показано на Рис. 13, *в*.

Переходим к построению эпюры, начиная от точки D. В узел C мы приходим с моментом $Fl$, сжимающим внутренние слои. Если бы узел был свободен от внешнего момента, мы ушли бы из узла с тем же, с чем пришли в него, то есть продолжили бы движение по участку BC, начиная с момента $Fl$ с той же самой внутренней стороны. Однако момент в узле направлен так, что сжимает внешние слои участка BC. То есть получается, что момент, сжимающий внешние слои, работает против того, что сжимает внутренние, и на участок BC перейдет не сумма их ($2 + 1 = 3$), а разность ($2 - 1 = 1$).

Иначе говоря, момент, сжимающий внешние слои, «сильнее» момента, сжимающего внутренние. Тогда на участке BC (по крайней мере, в непосредственной близости к узлу) будут сжаты внешние слои, а величина момента в долях $Fl$ составит $2 - 1 = 1$.

Наконец, можно вообще избежать рассуждений как о приходе в узел и уходе из него, так и о «помощи». Нужно просто вообразить картинку Рис. 13, *д*. Черным обозначен внешний момент, синим – внутренний момент, найденный при анализе участка CD. Осталось понять, что из условий равновесия узла внутренний момент близ него на участке BC должен равняться $Fl$ и быть направленным по часовой стрелке (красным). Такой момент сжимает нижние (внешние) слои, что соответствует приведенным выше рассуждениям. Проверка, называемая «проверкой равновесия узла», сошлась.

Пойдет ли далее эпюра вверх или вниз? Очевидно, ни то, ни другое – она пойдет прямо, вдоль оси. Метод сечений позволяет строго доказать, что во всех точках участка BC сумма моментов постоянна, но мы стараемся избегать применения метода сечений. Тогда к тому же выводу можно прийти проще: изгибающий момент меняется только в соответствии с поперечной силой, а на участке BC последняя равна нулю – в самом деле, пока мы вообще не говорили о вертикальных силах.

Это соображение остается справедливым вплоть до сечения B, где приложена внешняя сила $F$. Можно сказать, что сила, направленная вверх, заставляет возрастать изгибающий момент. В данном

случае его эпюра находится снизу от оси, следовательно, изгибающий момент может трактоваться как отрицательный. Начиная со значения $-Fl$ и возрастая на $F$ по участку длиной $l$, момент обратится в нуль в точке A.

Можно, наконец, рассуждать совсем упрощенно: шарнир A свободен от внешнего момента, значит, там эпюра неизбежно придет в нуль.

Итак, даже не прибегая к вычислению реакций шарнира A, мы построили эпюру Рис. 13, *г*. Задача решена.

Определение реакций в точке A может потребоваться для проверки. Например, проецируя силы на вертикаль, находим реакцию в A, она направлена вниз и равна $F$. Значит, в сечении B она создаст момент $Fl$, сжимая нижние (внешние) слои. Такой же момент мы видим на построенной эпюре. Проверка сошлась.

*Задача* 10. Дана рама (Рис. 14, *а*). Построить эпюру $M_x$.

Представленная рама включает в себя Т-образный узел, что делает ее несколько более сложной, чем предыдущие. Тем не менее, при минимальной работе воображения решение может быть получено относительно просто.

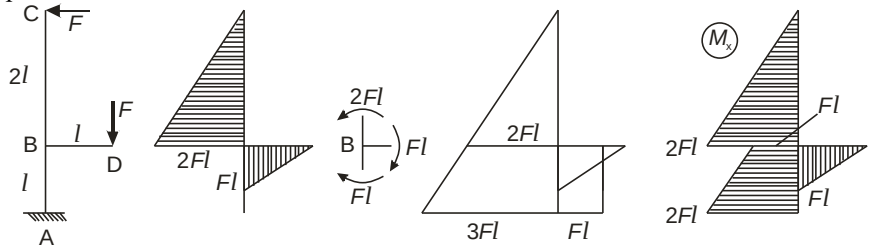



Рис. 14

Участки BC и BD эпюр могут быть построены сразу (Рис. 14, *б*). Сложность заключается в участке AB. Построение эпюры на нем может быть выполнено двумя способами.

Первый основывается на том соображении, что на участке AB эпюра будет линейной. Следовательно, достаточно найти моменты в сечениях A и B и соединить эти точки прямой линией.

Проблема мысленного анализа Т-образного узла состоит в том, что приходится держать в памяти модули и направления сразу трех моментов. То есть необходимо вообразить картинку Рис. 14, *в*. Верхний и правый моменты известны, нижний ищется из условия равенства моментов относительно узла B. Итак, первая точка найдена – момент $Fl$, сжимающий левые слои.

Вторую точку ищем аналогично: внешняя сила в точке C создает в заделке момент $3Fl$ слева, сила в точке D – момент $Fl$ справа. Складывая их с учетом направления, находим искомый момент в заделке: $2Fl$ слева. Ставим и соединяем точки, штрихуем эпюру, пишем ее обозначение (Рис. 14, *д*). Задача решена.

Для проверки используем второй способ. Он полностью основан на принципе суперпозиции. Строятся эпюры от каждой силы в отдельности (Рис. 14, *г*), затем эти эпюры складываются с тем же результатом. Проверка сошлась.

Для того, чтобы понять, какой способ удобнее и понятнее каждому конкретному исполнителю, необходимо решить несколько аналогичных задач обоими способами.

На Рис. 15 даны примеры для самостоятельного решения. Обратим внимание, что формы рам и нагрузки совершенно одинаковы, отличаются только внешние связи.

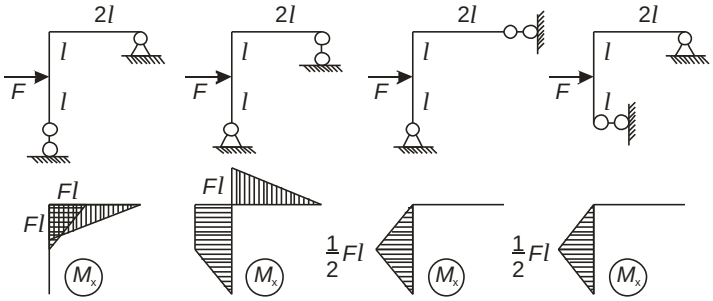



Рис. 15

**Плоскопространственные и пространственные рамы**

Как мы видели, при построении эпюр плоских рам широко используются знания и приемы, приобретенные при рассмотрении балок. Аналогично, быстрый способ построения эпюр (плоско)пространственных рам предполагает хорошее умение быстро строить простые эпюры рам плоских.

Построение эпюр (плоско)пространственных рам методом сечений – необычайно продолжительный процесс, поэтому экономия времени при решении таких задач просто колоссальна.

Следует отметить, что достаточно высокая трудоемкость задачи диктует необходимость выполнять промежуточные построения все же в графическом виде, по крайней мере на первых порах. Но, несмотря на это, выигрыш по времени оказывается больше, чем для любой из выше рассмотренных задач. Если для них наибольшее время решения составляло около 40 секунд, то для данных задач его

стоит увеличить до 1 минуты, где 20 секунд отводится именно на рисование. Однако легко убедиться, что решение той же задачи методом сечений, в зависимости от квалификации исполнителя, может занимать от 10 до 60 минут. Разница очевидна.

Метод, призванный заменить метод сечений при решении подобных задач, может быть назван «методом проекций». Он используется в таких дисциплинах, как черчение и начертательная геометрия. Вначале трехмерный объект проецируется на три ортогональные плоскости, затем с проекциями совершаются необходимые действия, после чего трехмерный объект может быть восстановлен по трем проекциям.

В данном случае под «объектом» понимается совокупность эпюр двух (для плоскопространственных рам) или трех (для пространственных) моментов. Суть метода состоит в том, что рама вместе с нагрузками проецируется последовательно на две (три) плоскости. Получаются две (три) задачи на построение эпюр плоских рам (а в частном случае – консольных балок). Такие задачи быстро и легко решаются, после чего пространственный вид эпюр вычерчивается по имеющимся проекциям.

*Задача* 11. Дана рама (Рис. 16, *а*). Построить эпюры $M_x$, $M_z$.

«Вид А» (Рис. 16, *б*), то есть проекция рамы и ее нагрузок на плоскость, перпендикулярную стрелке А (вертикальную), показан на Рис. 16, *в*. По определению ось плоскопространственной рамы лежит в одной плоскости и, следовательно, стержень CD «закрывает» вид на стержень НК. Чтобы «увидеть» его, можно применить маленькую хитрость. Представим себе, что стержень НК слегка «вышел из плоскости», приподнявшись над ней, и, таким образом, стал видимым как «почти совпадающий» со стержнем CD. Получаем, таким образом, плоскую раму из двух участков, пересекающихся под углом, близким к 180°. Ось рамы в целях наглядности показана красным цветом.

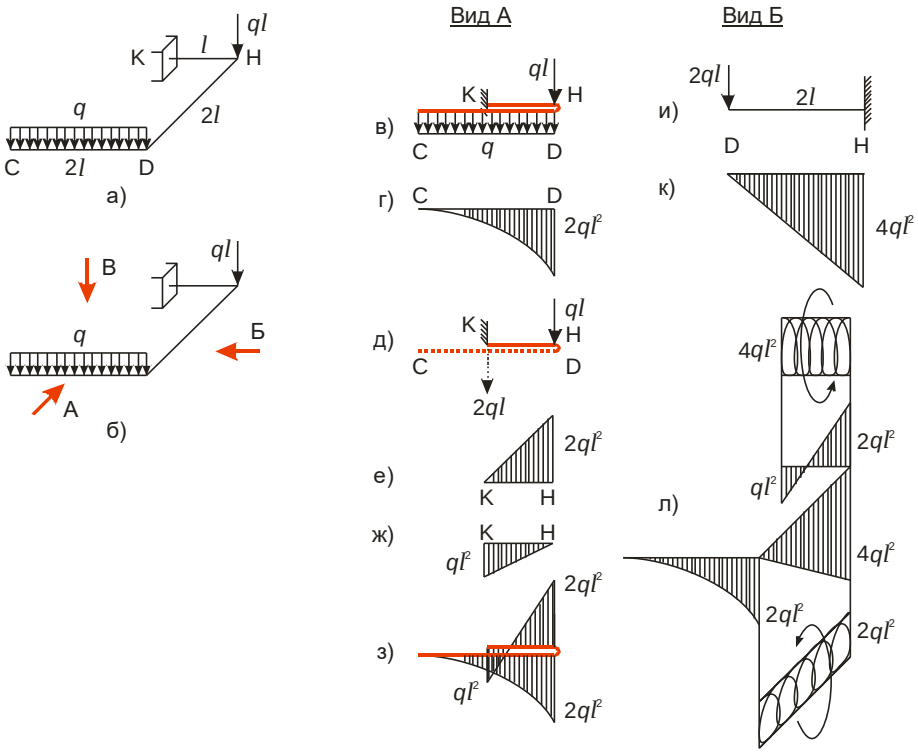



Рис. 16

Начнем построение эпюры с участка CD. Применяя обычную формулу для консоли, нагруженной распределенной силой, получаем момент в сечении D: $\frac{1}{2}q\cdot(2l)^2 = 2ql^2$ (Рис. 16, *г*). Обратим внимание, что правило «с чем пришел – с тем ушел» работает вне зависимости от угла, под которым пересекаются стержни в узле. Таким образом, в узел, в котором на проекции сечения D и H оказались «соседями», мы пришли с моментом $2ql^2$, сжимающим внешние слои рамы, поэтому и уйти из узла нужно с тем же моментом. Но куда эпюра пойдет дальше? Чтобы ответить на этот вопрос, избегая метода сечений, можно воспользоваться приемом, который мы уже применяли (*Задача* 2): заменой распределенной нагрузки на сосредоточенную равнодействующую. Напомним, что момент от распределенной нагрузки в любой точке, не находящийся внутри участка ее действия, равен произведению интенсивности нагрузки на длину участка (это и есть равнодействующая) и на плечо, то есть расстояние от середины участка до интересующей нас точки.

Итак, величина равнодействующей равна $q \cdot 2l = 2ql$ (показана пунктиром на Рис. 16, *д*), точка ее приложения – середина участка CD, который приходится как раз «напротив» заделки (или, если угодно, «под» ней). Плечо равнодействующей относительно заделки, таким образом, равно нулю. Поэтому, выйдя из узла H с величиной $2ql^2$ (сверху, то есть снаружи), момент на участке НК будет изображаться эпюрой Рис. 16, *е*. Что же касается внешней силы, действующей только на участке НК, то ее эпюра показана на Рис. 16, *ж*. Осталось по принципу суперпозиции сложить все три эпюры и изобразить результат на одном рисунке (Рис. 16, *з*) – это и есть искомый «Вид А» окончательной эпюры.

«Вид Б» гораздо проще: Рис. 16, *и*, эпюра Рис. 16, *к*. Величина силы, приложенной к концу консоли, есть все та же сосредоточенная равнодействующая.

Что же касается «Вида В», то на нем никаких эпюр нет и быть не может, поскольку по определению в плоскости оси плоскопространственной рамы нет ни внешних, ни, следовательно, внутренних силовых факторов.

Отдельную сложность может представлять построение эпюр крутящего момента. Есть по меньшей мере два пути. При хорошо развитом пространственном воображении эти эпюры строятся на трехмерном (точнее, изометрическом) виде после того, как будут построены все эпюры изгибающих моментов. При этом следует помнить, что если стержни рамы пересекаются под прямым углом, то в узле, свободном от момента, любой изгибающий момент на одном стержне полностью переходит в крутящий на другом, и наоборот. Таким образом, можно проследить «судьбу» каждого изгибающего момента, дошедшего до узла: он обязательно должен дать крутящий момент на перпендикулярном стержне.

Другой путь построения эпюр крутящего момента состоит в том, что на каждой проекции можно найти стержень, который проецируется в точку. Например, на Рис. 16, *в* сечения D и H почти слились, хотя фактически представляют собой концы стержня DH. Таким образом, на окончательном виде эпюры этот «невидимый» на проекции стержень должен быть нагружен крутящим моментом.

Окончательная эпюра представлена на Рис. 16, *л*. Отметим, что ради экономии времени на практике рекомендуется совмещать Рис. 16, *а* и Рис. 16, *б*, то есть стрелки направлений проекций наносить прямо на расчетную схему с постановкой задачи.

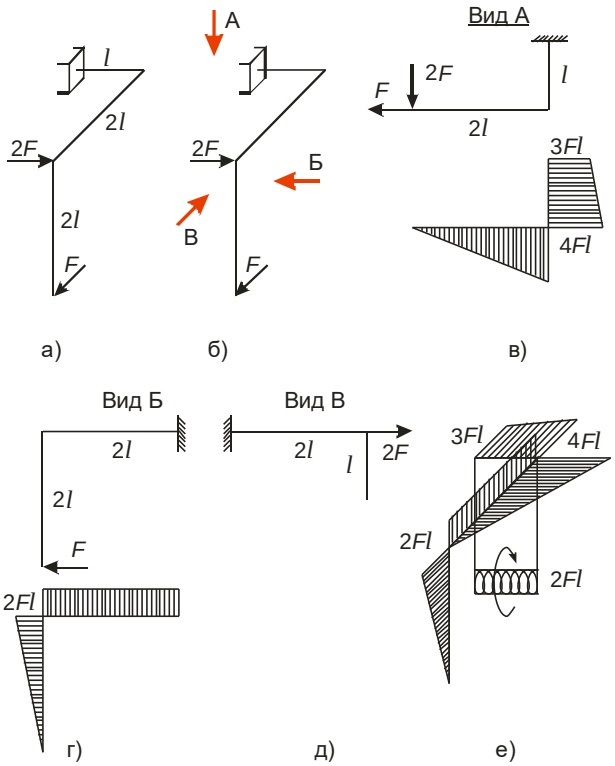


Рис. 17

*Задача* 12. Дана рама (Рис. 17, *а*). Построить эпюры $M_x$, $M_y$, $M_z$.

Ход решения показан на Рис. 17, *б-е*. В целом все понятно из рисунка, но все же необходимо дать ряд пояснений.

- На «Виде Б» не отражена сила $2F$, поскольку она направлена вдоль оси вида и ее проекция на плоскость представляет собой точку. Таким образом, если и каждый из стержней рамы, и каждый из векторов сил, параллельны одной из трех ортогональных осей, то на каждой из проекций отсутствуют некоторые из сил, что упрощает решение задач;
- «Виду В» вообще не сопоставлена ни одна эпюра изгибающих моментов, поскольку показанная сила вызывает только растяжение.

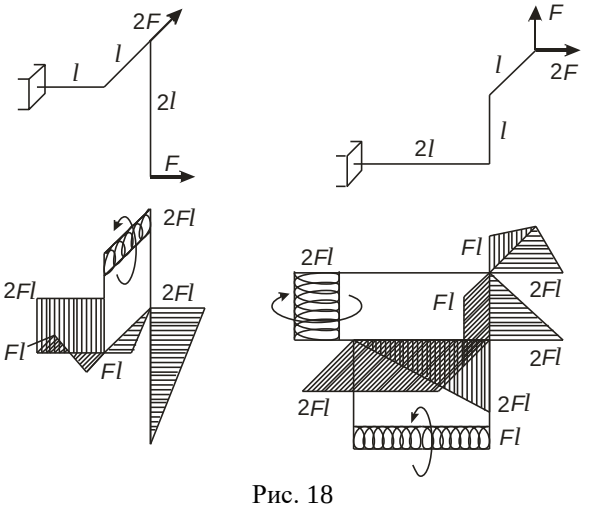


Рис. 18

На Рис. 18 даны две расчетные схемы пространственных рам, а под ними – эпюры изгибающих и крутящего моментов. Предлагается построить эпюры за расчетное время в 1 минуту.