Домашнее задание №6.
Устойчивость.
Определение критической силы

Теоретическая часть состоит из одной формулы, вывод которой можно проследить по учебнику В. И. Феодосьева (§87). Сама формула приведена в домашнем задании Елизаветы Ильиничны, которое, как обычно, я подробно разбираю ниже.

Полезно послушать видеокурсы по теории устойчивости, совсем недавно прочитанные молодыми преподавателями нашей кафедры. Обилие разнообразных задач и примеров превращает занятия в комбинацию лекции и семинара, а эксперименты приближают к лабораторным работам. Иными словами, всё в одном.

- Задача Эйлера, коэффициент приведения длины, пределы применимости формулы Эйлера. Лектор – С. А. Бриеде;
- Простая задача расчета на устойчивость (до 8:23), одна сложная задача (8:23-12:30), другая (12:30-26:42), задача на энергетический метод с частичным отказом от принципа начальных размеров (26:42-41:35), задача расчёта по коэффициенту снижения, подбор размера сечения (41:35-52:29), задача с сечением в виде уголка по ГОСТ (с 52:29). Лектор –С. А. Бриеде;
- Задача Эйлера, коэффициент приведения длины, пределы применимости формулы Эйлера, коэффициент снижения допускаемого напряжения. Показаны некоторые простейшие эксперименты и иллюстрирующие фотографии. Решена сложная задача устойчивости и рассмотрены некоторые другие темы, слегка выходящие за пределы курса. Лектор – М. В. Попков.

У меня есть небольшие претензии к обоим по терминологии и обозначениям.

Можно посмотреть примитивный эксперимент на устойчивость (до времени 1:24; далее идет пример, выходящий за пределы нашего курса).

По сути дела, данная задача, как и многое другие задачи сопротивления материалов (и не только его), имеет физическую и математическую части. Особенностью именно данной задачи можно признать то, что эти части почти не пересекаются, причем именно математическая играет наибольшую роль.

С физической точки зрения, задача сводится к определению коэффициента приведения длины μ (не путать с коэффициентом Пуассона). Его физико-геометрический смысл изложен в учебнике Феодосьева (§84). С математической точки зрения, она требует многократных операций с многочленами (полиномами): возведение в степень, интегрирование и дифференцирование.

Начать предлагается именно с физической части, подключая фантазию и воображение.

- На листе бумаги изобразить заданную стойку с соблюдением масштаба, то есть с учетом заданной величины l_0;

- С применением знаний, полученных в лекционной теме "Расчётные схемы связей в плоских задачах" представить, какие перемещения в различных сечениях стойки запрещены и какие – разрешены;
- Изобразить параллельно расчётной схеме примерный вид изогнутой оси, основываясь на здравом смысле, воображении, условиях нагружения и закрепления;
- Найти на получившейся кривой точку перегиба, то есть точку, в малой окрестности которой стойка прямая. Если такая точка на кривой отсутствует, значит, упругую кривую надо мысленно "достроить" (экстраполировать) так, чтобы полученная кривая была похожа на половину волны (т. н. полуволну) синусоиды;
- Посчитать долю длины стойки от точки перегиба до конца стойки, более удалённого от этой точки. В первом случае получится число, меньшее единицы, во втором – большее. Вот это число и будет приблизительным значением искомого коэффициента μ.
  Другой способ состоит в подсчёте числа полуволн, укладывающихся в полученной упругой линии. Затем надо взять число, обратное найденному. Способ удобен для стоек, не имеющих на упругой кривой точки перегиба;
- Запомнить или, лучше, записать полученный результат.

Если фантазия вам отказывает, можно провести эксперимент. В качестве стойки не следует брать стержень из дерева или жёсткого пластика – он почти неизбежно сломается. Лучше всего подходит стальная слесарная линейка (не путать со столярной). Далее моделирование условий закрепления и нагружения ограничивается только воображением исполнителя, ловкостью его рук и наличием вспомогательных средств. Например, в качестве заделки можно использовать тиски, струбцину, плоскогубцы в руках добровольного помощника, стопку тяжёлых книг, прижимающих линейку к столу, и т. п.

В случае нагружения силой свободного конца стойки не следует давить на торец ладонью – он должен свободно перемещаться в поперечном направлении. Хорошо подойдёт дощечка или книга с жёсткой обложкой. Поверхность должна быть гладкой.

Полученную изогнутую ось можно сфотографировать (опять же, силами добровольцев) и подробно рассмотреть результат.

Противоположная последовательность действий (сначала расчёт, потом эксперимент) не рекомендуется: зная "точный" (хотя и, возможно, ошибочный) результат расчёта, мы будем невольно "притягивать" к нему результат эксперимента.

Итак, тем или иным образом, с помощью эксперимента, мысленного или физического, приближённое значение μ получено, и можно приступать к расчёту.

Стр. 1: Постановка задачи, формула энергетического метода, граничные условия, функции y, y', y''

Сразу же – об обозначениях. Елизавета Ильинична обозначает функцию прогибов через y, что, строго говоря, некорректно: это обозначение оси, а у нее не может быть "величины" и "производной". Ось y, кстати, тоже указана, что усиливает путаницу. Правильное

обозначение все-таки – *v*. Однако через *y* обозначает эту функцию и В. И. Феодосьев. Под давлением двух авторитетов я вынужден признать обозначения равноценными.

Поз. 1: выбор системы координат. С одной стороны, начало отсчёта может быть расположено и на верхнем, и на нижнем концах стойки – результат от этого не зависит. С другой стороны, удачный выбор нулевой точки в некоторых расчётных схемах может заметно упростить решение. Для этого надо сначала проанализировать наложенные связи и посчитать, сколько граничных условий может быть записано на каждом из концов: где граничных условий больше, там и следует располагать начало отсчёта. При равном их количестве удобно учесть сравнительную "силу" граничных условий: чем ниже порядок производной, тем "сильнее" будет наложенное на неё граничное условие. Уместно напомнить физический смысл производных (с точностью до жёсткости):

- y – прогиб ;
- y' – угол поворота касательной θ;
- y'' – изгибающий момент M_x;
- y''' – поперечная сила Q_y.

Начало отсчёта удобно выбирать там, где выше совокупная "сила" граничных условий. Направление оси *y* говорит о выборе левосторонней системы координат, что в данной задаче не играет никакой роли, а в другой может оказаться крайне важным фактором: надо выбирать правостороннюю декартову систему координат относительно изогнутой оси так, чтобы функции *v* и θ были положительны. Поэтому изображать саму ось необходимо – именно так принято указывать систему отсчёта.
Еще одна тонкость, связанная с точкой приложения внешней силы, будет рассмотрена ниже;

Поз. 2: функция прогиба выбирается в виде многочлена. Его порядок – предмет отдельного серьёзного разговора, который в кратких методических указаниях видится неуместным. Таким образом, следует делать все в точности так, как Елизавета Ильинична. Разве что записывают функцию обычно раньше, чем граничные условия. Впрочем, последовательность может быть любой;

Поз. 3: сами граничные условия. Их количество непосредственно связано с порядком многочлена. Как уже указывалось, этот вопрос слишком сложен, и может быть сведен к следующим рекомендациям:

- Записываются все граничные условия;
- Для решения отбираются самое "сильное", затем – "сильнейшее" среди оставшихся, и т. д.;
- Отбор прекращается, когда их количество достигнет четырёх;
- Если их недостаточно, значит, совершена ошибка.

Поз.4: из двух условий, записанных для начала координат, следуют два нулевых коэффициента полинома;

Стр. 2: Вычисление коэффициентов многочлена, проверка граничных условий, определение числителя, знаменателя и критической силы

Поз. 5: вычисление остальных, ненулевых, коэффициентов многочлена. Нетрудно заметить, что в функцию прогиба входят пять коэффициентов, а граничных условий – четыре. Такая ситуация, вообще говоря, нехарактерна для математики, где эти количества обычно равны. Таким образом, один из коэффициентов останется неизвестным. Категорически рекомендуется (хотя, строго говоря, не обязательно) выражать все коэффициенты именно через a_4. На самом деле, такая рекомендация следует из того, что этот коэффициент никогда не обнуляется;

Поз. 6: формирование окончательного вида всех трёх функций;

Поз. 7: "проверка по граничным условиям". Личная инициатива Елизаветы Ильиничны – я обычно такую проверку не провожу. То есть она не обязательна, но желательна;

Поз. 8: под "формулой" понимается формула определения критической силы энергетическим методом (Поз. 9, стр. 1).

Поз. 10: в качестве первого подпункта здесь необходимо непростое объяснение.
Энергия или работа есть (с точностью до коэффициента) сила, умноженная на перемещение. Следовательно, сила (в частности критическая) равна потенциальной энергии, накопленной за счёт изгиба, деленной на перемещение, в данном случае – осевое. То есть интеграл в числителе формулы (Поз. 9) соответствует изгибу, а знаменатель – растяжению-сжатию, точнее, определённо сжатию.
Если посмотреть на расчётную схему, становится ясно, что изгиб происходит по всей длине стойки, а сжатие – только в нижней её части длиной l_0. Таким образом, пределы интегрирования: в числителе $[0; l]$, в знаменателе – $[0; {}^3/_5 l]$. Это первое.
Второе. Цитирую Елизавету Ильиничну: "l_F – длина стержня, на которой приложена осевая сила" (Поз. 11). Не было нужды вводить новое обозначение вместо l_0, но дело даже не в этом. По сути дела все правильно, но… у нас так не говорят. Осевую силу нынче принято называть нормальной, термины "осевая" и "продольная" считаются устаревшими. И потом, глагол "приложить" и его производные применяется к внешним силовым факторам. Про внутренние силовые факторы говорят "действовать". То есть цитированную фразу читаем так: "l_0 – длина стержня, на которой действует нормальная сила".
Третье. Елизавета Ильинична пошла здесь по непростому пути, который я не рекомендую повторять. После интегрирования она сразу подставляет коэффициент ${}^3/_5$, что чревато ошибками. Что советую (и всегда советовал) я: ввести обозначение $k = {}^3/_5$ и подставлять в формулу именно k, которое и "тащить" до последнего, то есть до момента подстановки всех исходных данных.
Четвёртое. В данном случае граничные условия (Поз. 3, стр. 1) на обоих концах не просто равны по "силе" – они идентичны, что немудрено при одинаковом, шарнирном, закреплении обоих концов. Однако если бы Елизавета Ильинична выбрала начало отсчёта на верхнем конце стойки, ей пришлось бы использовать пределы интегрирования $[{}^2/_5 l; l]$ вместо $[0; {}^3/_5 l]$, что, очевидно, куда менее удобно.
Так что в данном случае Елизавета Ильинична сделала все разумно. Следовательно, если

сила приложена не на торце стойки, начало отсчёта оптимально выбирать на нижнем ее конце, безотносительно к граничным условиям.

Легко заметить, что при подстановке в формулу коэффициент a_4 успешно сокращается, и именно поэтому число граничных условий не равнялось количеству коэффициентов многочлена.

Стр. 3: формула Эйлера, вычисление коэффициента приведения длины, момента инерции, критической силы, изображение примерного вида упругой оси, подведение итогов

Здесь все сделано настолько грамотно и снабжено настолько подробными и понятными комментариями, что ни дополнений, ни пояснений, ни тем более исправлений не требуется.

После вычисления коэффициента μ следует вспомнить о нашем предварительном эксперименте. Чем больше грубая прикидка похожа на результат расчёта – тем лучше. Кстати, такова единственная и при этом весьма ненадёжная проверка решения.

Образец расчёта на устойчивость в электронном виде.