Домашнее задание №5, задача №1.
Статически неопределимые плоскопространственные рамы.
Расчёт на прочность

Стр. 1: Постановка задачи, степень статической неопределимости, ОС, ЭС, коэффициент соотношения податливостей

1. Единственная ОС для всех задач обычно имеет одинаковый вид: консольная рама. Другие ОС к изучению и применению не обязательны, хотя и приемлемы;
2. Формула справедлива только для тонкостенных прямоугольников. Здесь b – ширина, h – высота прямоугольника;
3. Коэффициент соотношения податливостей определённого обозначения не имеет. Аббревиатура "КСП" также введена Елизаветой Ильиничной – я такое сокращение не использую. В некоторых источниках фигурирует термин "коэффициент соотношения жесткостей" и величина, соответственно, прямо обратная той, что применяем мы. Всё это принципиальной роли не играет.
   Гораздо важнее числовое значение коэффициента. Его величина, существенно (на порядок и выше) бóльшая или меньшая единицы, говорит об ошибке. Для сплошных квадрата и прямоугольника рекомендуется запись коэффициента соотношения податливостей (и, как следствие, обобщённых перемещений) в виде десятичной дроби. Для остальных сечений предпочтительна запись простой дробью.

Стр. 2: Эпюры "F", единичная и суммарная, обобщенные перемещения, проверка

4. Елизавета Ильинична, как и я, использует обозначение направления крутящего момента "кривой стрелкой". Это всего лишь один из способов. Можно использовать другой или придумать свой;
5. Традиционно величину обобщённых перемещений сводят к записи именно через изгибную, а не крутильную податливость;
6. Ввиду отсутствия второй ОС в плоскопространственных рамах (см. п. 1) проверка перемножением видится единственно возможной.

Стр. 3: Вывод формулы эквивалентного напряжения по критерию Хубера-Мизеса

Поз. 7: Данный вывод для упрощённо-плоского НС (поз. 8) необходимо внимательно проследить: этот вопрос частенько задают на экзамене. Однако приводить его полностью в домашнем задании явно неразумно. Необходима лишь окончательная формула (поз. 9). Рекомендуется также сделать аналогичный вывод для эквивалентного напряжения по критерию Треска-Сен-Венана.

Стр. 4: Сравнение возможных опасных сечений, нахождение опасного сечения, вычисление размера, подведение итогов

Поз. 10, стр. 2: Исследование на экстремум функции изгибающего момента на участке CD не выполнялось, поскольку экстремум, очевидно, находится в сечении D, а его величина равна нулю. Однако, если такой уверенности нет, исследование на экстремум на всех участках распределённой нагрузки проводить обязательно – отсутствие такой проверки

есть одна из самых распространенных ошибок.
Другая ошибка есть упущение из вида одного, а то и нескольких, возможных опасных сечений. Можно сказать так: сечение допустимо не рассматривать, если можно неопровержимо доказать, что найдётся хотя бы одно сечение опаснее него.
Например, на дальнем стержне (участок AB) крутящий момент постоянен (а в наших задачах он постоянен всегда), но при этом изгибающий момент в заделке меньше, чем слева от узла B. Значит, заделка заведомо не будет опасным сечением, и её можно не рассматривать. А вот то самое, слева от B, сечение пока является единственным кандидатом. На участке BC сразу отбрасываем сечение ближе узла B – по той же причине, что и раньше. И, подойдя к узлу C, прощаемся с предыдущим кандидатом – изгибающий момент там такой же, как в сечении II, а крутящий – меньше. Та же история на участке CD – крутящий одинаковый, а изгибающий на конце меньше, чем в сечении I. Два кандидата определились.
Я старался, чтобы ни в одной задаче не было одного ярко выраженного возможного опасного сечения. Обычно их два, но может оказаться и три, и даже четыре.

Но разобранная задача, увы, к таковым не принадлежит. При всей образцовости решения задачи Елизаветой Ильиничной вынужден признать, что поставлена задача мной была из рук вон плохо. Два сечения (с обеих сторон от узла C) с абсолютно одинаковыми моментами, да ещё с модулем, равным единице – некрасиво и скучно!
С тех пор я осознал, что к составлению задач надо подходить более ответственно и творчески. В качестве образца решения более интересной задачи приводится часть домашнего задания студента И. Пильника (2021-22 уч. г.).

Домашнее задание №5, задача №2.
Расчёт на прочность в общем случае напряжённого состояния

Стр. 1: Постановка задачи, поиск возможных опасных сечений, опасных точек, формирование тензора напряжений, вычисление инвариантов

Аналогично тому, как любую задачу на статически неопределимые стержневые системы необходимо начинать с вычисления степени статической неопределимости, в задачах на "оболочки и валики" (наш внутренний кафедральный жаргон; правильное название см. в заголовке) обязательно начинать с поиска возможных опасных сечений. В большинстве задач (как и здесь, поз. 1) ответ на этот вопрос звучит как "Все сечения равноопасны", однако есть и другие случаи. Тогда корректными будут следующие формулировки: "Сечения участка I-I равноопасны", "Сечения участков II-II и III-III равноопасны", и т. п.

Далее производится поиск опасной точки (или опасных точек) в каждом из возможных опасных сечений (поз. 2). Следует напомнить, что в рамках безмоментной теории оболочек в точках одного радиуса на внешней и внутренней поверхностях оболочки НС считаются одинаковыми и, следовательно, равноопасными. Для сплошного вала в случае, как здесь, действия крутящего момента, НС может меняться по радиусу. Елизавета Ильинична допустила ошибку, которую я обнаружил только сейчас. Правильная формулировка звучит так: "Все точки поверхности равноопасны". Однако эта ошибка не сказалась на результате: на оси вала эквивалентное напряжение равно 28 МПа (проверьте!).

Обратим внимание на забавную деталь. "Кубик" НС, нарисованный Елизаветой Ильиничной, имеет ярко выраженные дуги, части параллели. С одной стороны, это логично, ведь в цилиндрах (как и в любых осесимметричных оболочках) параллель – это окружность. С другой стороны, при малых размерах элемента любые дуги превращаются в линии, зрительно неотличимые от прямых. Кроме того, такое объемное тело не является ни кубиком, ни даже параллелепипедом!

Сомневающимся следует обратиться к выводу формулы Лапласа: там элемент оболочки, также предполагаемый дифференциально малым, изображен криволинейным, хотя площадь его поверхности считается площадью прямоугольника. В теории оболочек принято изображать элемент криволинейным, невзирая ни на его, возможно, весьма малые размеры, ни на некорректный термин. Впрочем, слово "кубик" все равно обычно заключают в кавычки. К тому же, такой рисунок сразу даёт понять зрителю расположение и индексацию осей. Поэтому студентам категорически рекомендуется применять оба приёма – и криволинейный "кубик", и оси. Иначе бывает трудно разобраться, какие напряжения вдоль каких осей действуют. То есть, как обычно, Елизавета Ильинична сделала все образцово. Разве что можно избежать стрелок на осях – их направления в теории оболочек роли не играют.

В других задачах может оказаться, что вдоль одной оси (обычно меридиональной) действуют сразу несколько нормальных напряжений. В таком случае не рекомендуется отдельно изображать несколько "кубиков" для разных видов нагружения и затем складывать их по суперпозиции. Чрезмерное количество "кубиков" рассеивает внимание как исполнителя, так и проверяющего, мешая сосредоточиться на итоговом, суммарном, НС. Следует придерживаться принципа "одна точка – одно НС", компоненты которого ищутся отдельно в алгебраическом виде. При этом знак напряжения указывается именно направлением вектора на рисунке, а не знаком в алгебраической записи. В сомнительных случаях желательно снабжать напряжения текстовым комментарием "растяжение" или "сжатие".

Вернёмся к данной задаче. Вычисление инвариантов исходного тензора (поз. 3) даст три ненулевых числа и, как следствие, кубическое характеристическое уравнение общего вида. Решать его численно и тем более аналитически – крайне неразумно. Для упрощения необходимо подумать о направлениях главных осей.

В радиальной площадке касательных напряжений нет, следовательно, радиальная ось – главная (поз. 4). Следует обратить внимание на индексацию – мы еще не знаем двух оставшихся главных напряжений, а значит, не имеем права использовать в индексах арабские цифры. Допустима индексация римскими цифрами (как у Елизаветы Ильиничны), штрихами, буквами и пр.

Итак, одна главная ось известна. Значит, две другие лежат в плоскости tm, но точно не совпадают с осями t и m. Таким образом, если временно "забыть" про радиальное напряжение (или, что то же самое, положить его равным нулю), площадка r останется главной, а ориентация осей не изменится. Получаем тензор плоского НС (поз. 5) и выделяем его из исходного по суперпозиции. Иными словами, мы разбили исходное НС на сумму одноосного (поз. 6) и плоского (поз. 5). В последнем случае одно из главных напряжений (радиальное) равно нулю.

Следует обратить особое внимание, что разбить тензор по суперпозиции можно бесчисленным количеством способов, и каждое из разбиений, очевидно, даст некий набор "главных напряжений", но, скорее всего, такое решение будет неверным. Все дело в направлении главных осей. Суперпозиция распространяется только на числа!

Рассмотрим пример. Пусть мы "забыли" про окружное напряжение, разбив исходное НС на одноосное сжатие и НС, не имеющее специального названия: касательные напряжения в одной плоскости (tm), и нормальное напряжение вдоль перпендикулярной оси (r). В этом последнем НС ось t заведомо не является главной, поскольку в площадке t действует касательное напряжение. А в первом простом НС ось t является главной. То есть главные напряжения, найденные в двух полученных НС, будут направлены вдоль разных осей, и алгебраически складывать их бессмысленно.

Стр. 2: Решение квадратного уравнения, индексация главных напряжений, вычисление коэффициента запаса, подведение итогов

После исчезновения радиального напряжения в тензоре появилась нулевая строка и нулевой столбец. Тогда третий инвариант (определитель) тоже обнуляется и кубическое уравнение превращается в квадратное (поз. 7). После определения его корней (поз. 8), они же два главных напряжения, мы "вспоминаем" про радиальное напряжение, являющееся еще одним главным. Остается пронумеровать главные напряжения по убыванию (поз. 9) и вычислить коэффициент запаса по теории Мора, поскольку свойства материала при растяжении и сжатии различны (поз. 10, стр. 1). Решение закончено.

Интересно также изучить прочность вала в сечениях между камерой высокого давления и сечением приложения крутящего момента. Напряжённое состояние имеет вид "чистый сдвиг" с тем же касательным напряжением, равным 38.856 МПа. Предлагается самостоятельно убедиться в том, что эквивалентное напряжение равно 69.94 МПА, то есть всего на 16.8% меньше напряжения в опасных сечениях. При других исходных данных могло бы оказаться, что опасные сечения находятся как раз за пределами камеры.

Вторая задача всегда рассматривается на семинаре.

Для более подробных расчётов по второй задаче имеется файл формата MathCAD (версия 15). Чтобы почувствовать "физику" задачи, можно изменять исходные данные, изучая их влияние на результаты.

Напомню оба моих "дружеских совета", которые я дал на лекции. Первый: изобразив "кубик", надо прежде всего искать главные площадки. В частном случае все площадки могут оказаться главными, и тогда можно сразу выписывать главные напряжения, избегая длинного и непростого решения через инварианты. Напротив, если есть хотя бы одно касательное напряжение, необходимо писать тензор, вычислять инварианты, решать квадратное уравнение. Впрочем, в некоторых частных случаях (чистый сдвиг, плоское НС) решение можно получить и без инвариантов.

Второй совет касался последовательности индексации главных напряжений: либо 1-3-2, либо 3-1-2. Простая, казалось бы, задача выбора наибольшего и наименьшего чисел тоже иногда решается неправильно.

В отличие от задач на метод сил, проверок в подобных задачах нет.

В завершение дам отдельные ссылки на мои статьи по теме, каковые ссылки находятся на моей страничке:

- "Расчет на прочность цилиндра с втулкой". Строго говоря, задача особой сложностью не отличается, звездочкой в моём списке не отмечена, и в различных вариациях встречается чуть ли не во всех задачниках, которые мне довелось читать. Главная особенность задачи – восприятие твердого тела как жидкости или газа и соответствующее применение к этому телу формулы Лапласа и подобных. Кроме того, в статье подробно обсуждается сложный и чреватый ошибками вопрос расстановки знаков при напряжениях;
- "Необычная задача по общей теории напряженного состояния". Задача сложна хотя бы потому, что в ней рассматриваются сразу три тела или, точнее говоря, группы тел, причем нагружено одно из них, а изучается прочность другого. Кроме того, там продолжается обсуждение вопроса о знаках напряжений и деформаций, особенно в свете обобщенного закона Гука;
- "Гендерный подход к предельным напряженным состояниям". К статье можно относиться по-разному. Для одного это просто хохма, приправленная наукообразным содержанием. Для другого: научная теория с глубоким социальным смыслом. Для третьего: удобное мнемоническое средство "прочувствовать" скрытые закономерности одной из самых сложных (а скорее – самой сложной) частей механики деформируемого твердого тела. Причём я сам пока так и не понял, к какой категории отношусь…