Домашнее задание №2. Статически неопределимые задачи растяжения-сжатия и кручения

Задача №1. Растяжение-сжатие. Ферма

Стр. 1. Постановка задачи, использование симметрии, уравнения равновесия, вычисление степени статической неопределимости

В исходной постановке задачи прямой вертикальной тяге приписан номер 1, наклонной – номер 2. Тяга 1 имеет два участка – выше и ниже силы. Жёсткости обоих этих участков одинаковы. На расчётной схеме {1} Елизавета Ильинична слегка изменила нумерацию участков, сохранив номер 1 за верхним участком вертикальной тяги и присвоив номер 2 её же нижнему участку. Наклонная тяга поменяла номер с 2 на 3.
Рекомендуется при возможности сохранять исходную нумерацию; иначе, выписывая из исходных данных параметры второго участка, можно по ошибке присвоить их тому, что поменял номер. Иными словами, проще наклонную тягу по-прежнему индексировать номером 2, а нижнему участку вертикальной тяги присвоить номер 3. Тем не менее Елизавета Ильинична, как обычно, ошибки избежала.
Абсолютно жёсткое тело (АЖТ) справа от точки C {2} показано "завершённым", хотя фактически оно также мысленно рассечено пополам и было бы логичным указать на этот факт волнистой чертой.
Следует обратить внимание, что сила F при использовании симметрии уменьшилась вдвое {3} – об этом тоже иногда забывают.
Введение "новых обозначений" {4} и {5} сделано для дальнейшего упрощения формул. Если в реальных конструкциях отношения длин участков и площадей поперечных сечений, равные целым числам, ещё вполне вероятны, то для модулей Юнга и предельных напряжений такие соотношения могут быть признаны чудом, а подбирать таким образом свойства материалов инженерам не придёт в голову. Тем не менее в учебных задачах на подобное нарушение здравого смысла зачастую идут во имя упрощения формул, и поэтому введение неидексированных "квантов" не то чтобы приветствуется или, тем более, требуется, но подразумевается и поэтому выглядит вполне естественным.
Идя по этому пути до конца, можно было ввести квант предела текучести, обозначенный, скажем, σ_T и равный 100 МПа, и тогда соответствующие механические характеристики вертикальной и наклонной тяг оказались бы равными $3\sigma_T$ и $2\sigma_T$, соответственно.
В строке {4} допущена небольшая вольность: в программировании в левой части оператора присваивания записывается имя переменной, а в правой части – её значение. Таким образом, здесь по аналогии квант длины l лучше указывать как раз слева, как это сделано в строке {5} с квантом модуля упругости E.
Не следует упускать из виду то, что участки 1 и 2 из-за использовании симметрии вдвое уменьшили площади своих поперечных сечений {6}.
Первое из уравнений равновесия {7} записано для кусочка вертикальной тяги, отсечённой на участках 1 и 2. Второе {8} – для половинки АЖТ и участков 2 и 3. Оси y_1 и y_2 не обозначены и введены, вообще говоря, напрасно – достаточно было одной оси y, направленной по умолчанию вверх.
Далее из подсчёта числа уравнений и неизвестных делается **обязательный вывод о степени статической неопределимости** {9}.

Стр. 2. Кинематическая схема, уравнение совместности, определение усилий и напряжений

В пункте 5 ищется опасный участок вертикальной (стальной) тяги.

Стр. 3. Определение напряжений (продолжение), поиск опасного участка ("слабого звена"), площади поперечного сечения и перемещения АЖТ

Определившись с тем, что большее напряжение в стальной тяге возникает на участке 1, ищем площадь поперечного сечения (точнее, квант площади A) при условии, что предельное состояние конструкции будет достигнуто именно на участке 1. Затем аналогично определяем площадь из условия прочности наклонной (бронзовой) тяги {2}.
Вывод {3} кажется более чем очевидным. В противном случае можно было бы вместо знака равенства в формулах {1} и {2} использовать знак ≥ вплоть до числа.
Если $A \geq 287.2$ мм^2, то неравенство $A \geq 48.9$ мм^2 выполняется тождественно, однако обратное утверждение в общем случае ложно.
Дальнейшие выкладки с учётом пояснений Елизаветы Ильиничны говорят сами за себя.
Отметим напоследок, что энергетическая проверка в постановку задачи не входила и была выполнена для ещё большей уверенности в правильности ответа.

Задача №2. Кручение

Стр. 1. Постановка задачи, уравнение равновесия, вычисление степени статической неопределимости

Обратим внимание на выбор знака реактивного момента {1}. Если вблизи заделки отсечь кусочек вала слева, то внутренний момент, необходимый для его равновесия, при взгляде с конца внешней нормали к сечению будет направлен **против часовой стрелки** и, следовательно, окажется **положительным**. Ниже будет показано, что такой выбор направления реакции позволяет резко упростить работу со знаками и выполнить ряд простых проверок.
Вывод о степени статической неопределимости {2} мне не кажется столь однозначным. Дело в том, что при поверхностном взгляде на постановку задачи опытный наблюдатель видит всего одну заделку и свободный конец с другой стороны. Иными словами, на стержень наложена лишь одна связь и уравнения равновесия (сколько бы их ни потребовалось – одно для колонны или вала, два для балки, три для общей плоской или шесть для общей пространственной задачи) позволяют найти реакцию (или реакции) заделки. С этой точки зрения задача является статически определимой и вывод {2} выглядит ошибочным.
С другой стороны, подсчёт числа уравнений (одно) и числа неизвестных (две, а именно R и X) также формально верен. Но можно ли считать X неизвестной? Опять же, с формальной точки зрения – да, ведь её величина, влияющая на результат решения задачи, пока не найдена. С фактической – нет, потому что под "неизвестными" обычно понимают реакции связей, каковой X, в отличие от R, вроде бы не является. Тогда каков же физический смысл момента X?
Вообще говоря, ни задавать этот вопрос, ни тем более отвечать на него не следует, по крайней мере в учебном процессе. Имеется расчётная схема, и откуда она взялась – была ли составлена для какой-либо реальной задачи или автор её просто выдумал – исполнителю нет дела.
В своё давнее время домашнее задание на кручение было менее формализованным и более

приближенным к инженерной практике, чем нынешнее. И несколько задач описывали так называемое "кручение с зазором", отдалённо напоминая одноимённые задачи для растяжения-сжатия колонн. Имеется вал (изначально статически определимый) с закрепленным на нём поперечным стопором. При повороте его сечения стопор перекрывает известной величины зазор и касается абсолютно жёстких упоров. В них возникают реактивные силы, создающие новый реактивный момент. Задача, таким образом, становится единожды статически неопределимой. Условием совместности является то, что поворот заданного сечения именно таков, чтобы перекрыть зазор. Возможно, разбираемая задача – дальний и давний отголосок тех задач на кручение с зазором. Заданный угол φ_0 и есть угол, при повороте на который сечения B вал упирается в невидимые упоры, и задача действительно становится статически неопределимой. Просто в процессе многократных изменений (читай – упрощений и формализаций) как расчётных схем, так и текстов постановок задач, тот исходный физический смысл, такой простой, ясный и естественный, оказался утраченным…
Поэтому я сам не знаю, как следует трактовать подобные задачи – как статически определимые или неопределимые. И я решил отдать решение этого вопроса на откуп студента, и любое его решение принять как верное.

Стр. 2. Уравнения моментов по участкам, геометрические характеристики поперечных сечений, уравнение совместности перемещений
Стр. 3. Определение неизвестного внешнего момента, напряжения по участкам, определение опасного участка, условие прочности, вычисление размера поперечного сечения
В формулу определение диаметра (Стр. 3, п. 7) вкралась маленькая даже не ошибка, а "недописка": в первом корне должна быть указана тройка как обозначение именно кубического корня – по умолчанию корень считается квадратным. Но во втором корне тройка стоит, и результат верен.
Стр. 4. Углы закручивания по участкам, проверка заданного угла, определение наибольшего угла, построение эпюр
Стр. 5. Энергетическая проверка, подведение итогов

Завершая разговор об удачном выборе направления реактивного момента, можно отметить, что он позволил, в частности, получив его итоговое положительное значение, в ту же положительную сторону отложить его на эпюре. Кроме того, запись уравнения совместности также выполнялась без смены каких-либо знаков.

И ещё одно. Обычно из-за невнимательности и незнания правил округления в такой насыщенной расчётами задаче, к её концу даже у самых прилежных студентов накапливается погрешность в несколько процентов, и если она превосходит 3%, приходится пересчитывать. Например, в предыдущей задаче на растяжение-сжатие, не столь трудоёмкой, в расчёте площади сечения выявилась погрешность, равная 0.072%. А в рассматриваемой задаче на кручение **все** результаты, включая максимальный угол, диаметр, и даже работу и энергию – **абсолютно точны**, то есть их погрешность составляет ровно 0%. Больше таких случаев в моей практике не было…