Домашнее задание №1. Построение эпюр внутренних силовых факторов

Стр. 1, задача 1, растяжение-сжатие колонны

Данная задача была исключена из домашнего задания в 2016 году из-за сокращения программы курса. Тем не менее задачи на растяжение-сжатие я продолжаю рассматривать и на семинарах, и в данном руководстве, поскольку, во-первых, относительно простая тема позволяет лучше понять суть метода сечений и процедуру построения любых эпюр, а во-вторых, при выполнении и защите домашнего задания №2 строить эпюры для колонн все равно придётся.

Итак, вначале ищем реакцию заделки. Для этого складываем силы, вызывающие растяжение вблизи заделки и направленные, следовательно, вправо.

Получается $2F + 3F = 5F$. Далее, сила, взывающая сжатие, одна и равна F. Таким образом, "побеждают" растягивающие и создают в заделке силу $5F - F = 4F$. Теперь можно идти слева направо, изображая скачкй на эпюре там, где приложены силы. Причём силы, направленные вправо, создают растяжение (плюс) слева и сжатие (минус) справа, то есть скачок идет от плюса к минусу, то есть вниз.

Придя к правому торцу, мы встречаем силу, направленную влево. Рассуждая аналогично, приходим к выводу, что скачок должен выполняться вверх. Поскольку текущее (на третьем участке) значение нормальной силы равно $–F$, то мы приходим в нуль, что является проверкой решения.

Можно рассуждать и проще – на конце последнего участка усилие определяется силой, приложенной к торцу. Она равна F и является сжимающей, значит, порождающей отрицательное усилие того же модуля. То есть проверку можно закончить в точке приложения силы $2F$.

Наконец, ещё проще не искать реакцию заделки и строить эпюру не слева направо, а в обратном направлении. Правда, тогда мы лишаем себя проверки на левом конце, зато выигрываем время.

Стр. 2, задача 2, изгиб шарнирно опёртой балки

Решение выполнено внизу, эпюры изображены под расчетной схемой. К ним мы вернёмся позже.

Отбрасываем опоры, заменяем их реакциями {1}, {2}. Направления их выбираем, вообще говоря, произвольно, но можно постараться их предугадать – это позволит лучше понять "физику" задачи. В данном случае обе распределённые нагрузки направлены вниз, то есть, скорее всего, обе реакции (одна-то уж наверняка) направлены вверх. Елизавета Ильинична так и поступила.

Составляем сумму сил на вертикаль {3}. Пока в нём мало проку – одно уравнение содержит две неизвестных.

Теперь выберем точку для составления суммы моментов {4}. Разумеется, она может быть произвольной, но удобно выбирать точку приложения реакции – это позволит исключить её из уравнения. Елизавета Ильинична выбрала точку B. Произвольное правило знаков для моментов {5} не слишком удачно: гораздо удобнее выбирать направление так, чтобы неизвестная величина (в данном случае R_D) вошла с минусом. Это позволит, перенеся её в правую часть, сменить её знак с минуса на желанный плюс и больше никаких знаков не менять.

Далее из {4} находим R_D {6} и, подставляя её в {3}, определяем реакцию R_B {7}. Как и

предполагалось, обе реакции оказались положительными.
Альтернативный способ составления уравнений равновесия в подобных задачах заключается в том, что составляют уравнения моментов относительно точек приложения реакций, а сумма на вертикаль не составляют вовсе. Это позволяет получить не систему второго порядка (в данном случае {3} и {4}), а два независимых уравнения относительно реакций. Недостаток способа – дробные величины плеч реакций. Не берусь безусловно порекомендовать ни тот, ни другой путь. Следует попробовать оба и выбрать понравившийся.
Есть и ещё (по крайней мере) один способ – для истинных гурманов. Особенно эффективен он, когда имеется лишь один участок распределённой нагрузки. Тогда уравнение моментов составляется относительно середины этого участка, тем самым мы добиваемся того, что слагаемые, связанные с распределённой нагрузкой, в уравнение не входят. К данной задаче, как видно, способ хоть и применим, но не ведёт к упрощению решения.

Стр. 3, задача 2, продолжение

Изображаем безопорную расчётную схему {1}. На участке AB выбираем произвольное сечение E с текущей координатой z_{AB} {2} и вводим неизвестные внутренние силовые факторы Q_y {3} и M_x {4} с направлениями **строго согласно правилам знаков**. А вот произвольное направление положительного момента {5} на этот раз выбрано удачно, в чём мы убедимся ниже.
Составляем сумму сил на вертикаль {6}, выражаем искомую поперечную силу Q_y и подставляем в него значения координаты в начале {7} и в конце {8} участка. Видно, что сила знак не меняет, значит, экстремума изгибающего момента на этом участке нет. Сумма моментов {9} составляется относительно текущей точки E, что позволяет исключить из уравнения поперечную силу. С учетом выбранного правила знаков переносим неизвестный момент M_x в правую часть и без смены знаков получаем функцию момента относительно координаты. Подставляем в него начальное {10} и конечное {11} значения координаты и получаем моменты на краях участка.
При рассмотрении участков от второго и далее удобно делать не одно, а два сечения. Первое из них находится на дифференциально малом расстоянии слева от (раньше, не доходя до) начала текущего участка {12}. Второе – текущее в точке K. В левое сечение переносим найденные в конце предыдущего участка значения силы и момента: сила получилась отрицательной {8} и, значит, на левом конце расчётной схемы по правилу знаков она направляется вниз {13}. Отрицательный момент {11} по той же причине направляется против часовой стрелки {14}.
На участке CD поперечная сила меняет знак с плюса {15} на минус {16}. Это значит, что момент достигает экстремума. Для его поиска левую часть уравнения для силы {17} приравниваем нулю и находим координату экстремума {18}. По давней традиции величины, относящиеся к экстремуму (координата и момент), обозначаются звездочкой. Составляем сумму моментов {19} и, выражая из него неизвестный момент (это уравнение Елизавета Ильинична не выписала отдельно, делая выкладки в уме), подставляем найденную в {18} координату экстремума. Точное значение экстремума {20} равно $^{5929}/_{2592}\ q \cdot l^2$. Погрешность указанного десятичного значения 2.3 $q \cdot l^2$ составляет 0.55%, так что отказ от громоздкой простой дроби выглядит вполне оправданным.

Эпюры поперечной силы {8} и изгибающего момента {9} показаны под расчетной схемой (Стр. 2), что очень удобно для визуальной проверки обеих эпюр.

Стр. 4, задача 3, изгиб шарнирно опёртой балки
Стр. 5, задача 3, продолжение
Стр. 6, задача 4, изгиб шарнирно опёртой балки
Стр. 7, задача 4, продолжение
Данные задачи решаются по тому же алгоритму и отдельных комментариев не требуют.

Стр. 8, задача 5, изгиб консольной балки
Здесь уместно обратить внимание на грамотный выбор Елизаветой Ильиничной направлений неизвестных реакций заделки.
Согласно правилам знаков, на левом конце расчётной схемы положительный момент направлен по часовой стрелке, а положительная сила – вверх. Внешние силовые факторы тех же направлений порождают положительные внутренние. Следовательно, если направить реакции именно так, то по их формальным знакам можно будет сразу судить о фактических знаках внутренних силовых факторов.
Отбросив заделку, Елизавета Ильинична направила реактивный момент по часовой {1}, а реактивную силу {2} – вверх. Реакции получили такие знаки: сила – плюс {3}, момент – минус {4}. Именно такие знаки автоматически оказались на эпюрах – {5} и {6} соответственно.

Стр. 9, задача 5, продолжение

Стр. 10, задача 6, изгиб шарнирно опёртой балки с врезанным шарниром
Данная задача была включена в задание, можно сказать, в виде шутки, или, точнее, розыгрыша. Дело в том, что решается она за считанные секунды и не требует ни рисунков, ни формул. Тем не менее подавляющее большинство студентов подходят к ней со всей серьёзностью и ответственностью, расписывая все уравнения и делая сечения. Более того, некоторые умудряются ещё и ошибаться. Ниже я покажу, как можно потратить на решение ровно столько времени, сколько требуется для выполнения одного рисунка – эпюры моментов.
Предельная простота задачи определяется наличием шарнира, врезанного над средней опорой. Во врезанном шарнире момент всегда равен нулю. То есть мы сразу, во-первых, имеем одну точку эпюры над средней опорой. Во-вторых, расчётная схема разбивается на две независимых балки слева и справа от средней опоры. В-третьих, отпадает необходимость поиска не только реакции средней опоры, но и, как правило, реакций остальных опор.
Данная задача распадается на шарнирно опёртую балку AB, нагруженную распределённой силой и моментом на левом конце, и на балку BC с одним моментом на правом конце. Начнем с участка AB, а точнее, с момента. Согласно правилу знаков, ему будет отвечать отрицательный изгибающий момент в сечении A. Далее идёт парабола выпуклостью вверх, приходящая в сечении B, как мы уже знаем, в нуль. Поиск экстремума, правда, всё же требует определения реакции в опоре A, но без учёта участка BC. Итак, составляя сумму моментов слева от врезанного шарнира, находим реакцию в опоре A – она равна $^3/_2\ q{\cdot}l$ и направлена вверх. Нетрудно догадаться, что вся эпюра поперечной силы на данном участке будет расположена сверху оси и её не пересечёт. Значит, и экстремума на

участке АВ нет. Рисуем эпюру и переходим к участку ВС.
А на нём и рассматривать-то нечего: слева нуль, справа +2 $q \cdot l^2$. Соединяем точки прямой и всё – эпюра построена, задача решена.

Стр. 11, задача 7, изгиб балки с двумя врезанными шарнирами

В расчётной схеме пять неизвестных: в сечении А момент и две силы, горизонтальная и вертикальная, и по одной реакции в сечениях С и Е. Исходя из суммы на горизонталь, сразу исключаем из рассмотрения все горизонтальные силы, как реактивные, так и внутренние. Остаются 4 неизвестных. Уравнений будет больше, а именно:

1. Сумма сил на вертикаль;
2. Сумма моментов всех внешних силовых факторов слева от шарнира В, относительно него же;
3. То же, справа от В;
4. То же, слева от D;
5. То же, справа от D;
6. Сумма всех моментов относительно произвольной точки.

То есть имеем шесть уравнений для четырёх неизвестных. Значит, четыре уравнения используем для поиска реакций, одно – для необязательной проверки, а одно оказывается линейной комбинацией всех остальных уравнений и, таким образом, лишним.
Елизавета Ильинична выбрала уравнения №№5, 3, 1 и 2 ({1}-{4}), соответственно. Порядок решения выглядит разумным – каждое уравнение даёт новую, ранее неизвестную, величину, с учётом предыдущих результатов. Реакция R_4 вычисляется сразу {1}, что позволяет последовательно найти R_3 {2}, затем R_1 {3}, и, окончательно, R_2 {4}. Далее, **не делая сечения и не рисуя отсечённый кусочек** (точнее, выполняя эти действия мысленно) {5}, Елизавета Ильинична ищет координату экстремума {6} и его величину {7}, на участке АВ.
Остальные расчёты выполняются аналогично.

Стр. 12, задача 7, продолжение

Стр. 13, задача 8, плоская рама

Задача также решена исключительно в уме. Сперва составляем сумму моментов относительно неподвижного шарнира. Обе внешние силы дают по моменту Fl против часовой стрелки. Чтобы уравновесить конструкцию, реакция в подвижном шарнире с плечом l должна быть направлена вниз и равняться $2F$. Сумма на горизонталь даёт нулевую горизонтальную реакцию в неподвижном шарнире. Вертикальная в нём же равна $2F$ и направлена вверх, хотя для построения эпюры она и не нужна.
Строим эпюру начиная, допустим, с правого верхнего угла. Вертикальная сила вызывает сжатие, а не изгиб, и может пока не учитываться. Горизонтальная сила сжимает левые (внутренние) слои и в правом нижнем углу даёт момент $2Fl$. Из узла согласно правилу "с чем пришёл – с тем ушёл" мы уходим с тем же моментом, сжимающим те же внутренние слои. Но далее вертикальная сила заставляет эпюру момента идти вниз и прийти в нуль в левом нижнем углу. Задача решена.

Стр. 14, задача 9, плоская круговая рама

Постановка задачи {1}. Далее в уме находим реакции, составляя сперва сумму моментов относительно шарнира D. Обе внешних нагрузки дают момент $Fr + 2F \cdot r = 3Fr$ по часовой стрелке. Тогда сила в шарнире A с плечом r должна быть направленной вниз и быть равной $3F$. Теперь из проекций на вертикаль и горизонталь находим реакции в самом шарнире D. Безопорная конструкция {2}.

Стр. 15, задача 9, продолжение

Разбиваем раму на участки DC и CA. На первом из них {1} произвольно выбираем направление изгибающего момента и правило знаков (вновь, на мой взгляд, неудобное). В начале участка CA сила $5F$ {2} – внутренняя, найденная в уме из равновесия участка DC, а сила $2F$ {3} – внешняя. В уравнение равновесия попадает их сумма, точнее, разность $3F$ вместе с внутренним моментом $5Fr$, также найденным на предыдущем участке.

Углу 180° в выбранной системе координат соответствует сечение A. Момент получился отрицательным и равным по модулю Fr {5}. Согласно выбранному правилу знаков {6}, отрицательным считается момент, сжимающий внешние слои рамы. Именно таков по модулю и направлению внешний момент в сечении A – проверка сошлась.

Эпюра {3} показана на Стр. 14.

Стр. 16, задача 10, Т-образная плоская рама

Реакции заделки найдены на черновом рисунке внизу. Построение эпюры очевидно.

Две остальные задачи (всего их в то время было 12) посвящены плоскопространственной и пространственной рамам, соответственно. В настоящее время эти задачи исключены из домашнего задания и здесь не рассматриваются.