# К вопросу о безразличном равновесии в задачах устойчивости

Иногда на вопрос студенту о том, что такое критическая сила, приходится слышать ответ «Это сила, при приложении которой стойка находится в безразличном равновесии». Нам представляется, что такое определение следует признать в лучшем случае полностью оторванным от практики, а в худшем – просто ошибочным.

В начальных курсах физики устойчивое, неустойчивое и безразличное равновесия объясняются обычно на простейшем примере – шарика, покоящегося на различных поверхностях: вогнутой (поз. 3 на Рис. 8.1[1]), выпуклой (поз. 4) и ровной (поз. 5), соответственно.

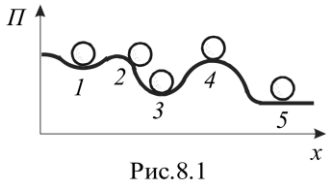


Рис.8.1

В курсе теоретической механики трактовка схожая, но уже приближенная к задачам на стержневые системы. Например, в учебнике [2] сказано следующее: «Если стержень, получив любое малое начальное отклонение от положения равновесия, остается в равновесии в новом отклоненном положении, то такое положение равновесия называется безразличным. Примером безразличного положения равновесия может служить равновесие стержня, у которого закрепленная точка 0 совпадает с центром масс С. В этом случае силы, приложенные к стержню, образуют равновесную систему сил при любом начальном его отклонении от первоначального положения равновесия (рис. 107, в)». Однако обратим внимание, что в теоретической механике рассматриваются только недеформируемые тела.

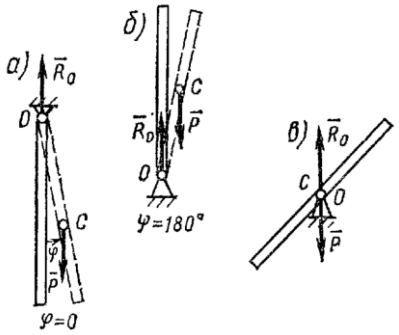


Рис. 107

Продолжая движение от голой теории к практически важным случаям, обратимся к учебнику [3]. Во введении в тему устойчивости деформируемых конструкций авторы пишут, что между устойчивым и неустойчивым положениями равновесия «существует переходное состояние, называемое *критическим*, при котором деформированное тело находится в безразличном равновесии: оно может сохранить первоначально приданную ему форму, но может и потерять ее от самого незначительного воздействия».

Напомним, что в теории линейной устойчивости вводятся многочисленные идеализирующие гипотезы, такие как предположения об: изначальной прямолинейности стойки, идеальности связей (в частности, отсутствии в них трения), приложении силы строго к оси стойки, и т. д. Если предположить, что все гипотезы точны, то в задаче Эйлера, например, потери устойчивости просто никогда не случится, а будет происходить обычное осевое сжатие. Чтобы преодолеть это противоречие, вводят понятие возмущения (того самое «незначительного воздействия», упомянутого в [3]), то есть сколь угодно малого однократного внешнего воздействия, перпендикулярного оси стойки.

Понятие возмущения (правда, неявно и без произнесения этого слова) неразрывно связано с самыми примитивными задачами устойчивости. В частности, шарик 4 (Рис. 8.1) может бесконечно долго оставаться на выпуклой поверхности, пока к нему не будет применено возмущение, которое наглядно покажет, что равновесие было неустойчивым. Аналогично, возмущение равновесия шарика 5 приведет к тому, что он сместится в новое положение, сколь угодно близкое к исходному, и ничем не отличимое от него.

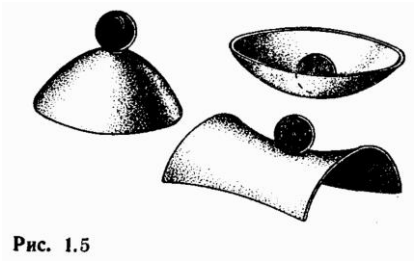
На практике же в возмущении обычно никакой потребности не возникает: всевозможные погрешности изготовления стойки, конструкции и наложения связей и приложения силы приводят к тому, что стойка сама, без внешних воздействий, выходит из прямолинейного состояния, как только сила достигает критической величины. Более того, переход к изогнутому устойчивому состоянию всегда происходит раньше, чем сила достигнет критического значения, то есть теоретически посчитанная критическая сила есть верхняя оценка силы реальной.

Таким образом, слова о том, что тело «может сохранить первоначально приданную ему форму, но может и потерять ее от самого незначительного воздействия» следует понимать так: «чисто теоретически, при точном выполнении гипотез и без возмущений, безразличное равновесие возможно». На практике же оказывается, что малейшие отклонения, перекосы, погрешности и неточности делают безразличное равновесие абсолютно недостижимым.

Далее, вновь обратимся к источнику [2]: «В общем случае кроме начального отклонения стержню следует сообщить также еще и некоторую достаточно малую начальную угловую скорость. Естественно, что тогда случай безразличного положения равновесия стержня следует отнести к

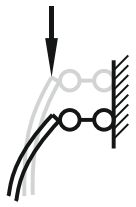
[1] Рис. 8.1 взят из источника [1], нумерация этого и некоторых других рисунков дается по оригиналу

неустойчивому положению равновесия, так как, получив любую малую начальную угловую скорость, стержень дальше будет удаляться с этой угловой скоростью по инерции от своего первоначального положения равновесия». В теории устойчивости стойки обычно полагаются невесомыми, но на практике их массу, а значит, и инерцию, учитывать необходимо.


Рис. 1.5

Если же обратиться к книгам, специально посвященным именно углубленному изучению устойчивости (например, [4] и [5]), то там словосочетание «безразличное равновесие» вообще найти не удается. Характерно, что, описывая различные формы равновесия, Н. А. Алфутов [5] приводит Рис. 1.5, где затрагивается случай «минимакса»: шарик расположен на седлообразной поверхности и ответ на вопрос об устойчивости его равновесия зависит от направления возмущения. При этом положение шарика на ровной горизонтальной поверхности не обсуждается вовсе, поскольку такие случаи в теории устойчивости деформируемых стержней практического смысла не имеют.

Отметим попутно остроумное наблюдение авторов [1]: «*П* – высота рельефа как функция координаты *x*; одновременно, это потенциальная энергия шарика» (Рис. 8.1), то есть математическая функция отождествляется с физической поверхностью. Далее говорится следующее: «Особое место занимает состояние безразличного равновесия 5. Это – единственная ситуация, когда смена положения не нарушает равновесия. Переход конструкции из устойчивого состояния в неустойчивое (при росте нагрузки) происходит через эту фазу, называемую критической; определение соответствующего (критического) значения нагрузки и представляет обычно задачу расчетчика», то есть нет указания на то, что такое положение достижимо на практике. Примерно о том же пишет и Ю. Н. Работнов [6]. Следовательно, безразличное равновесие – всего лишь математическая точка, через которую можно пройти, но оказаться именно в ней невозможно.


Рис. 1

Напоследок приведем собственные соображения о том, что словосочетание «безразличное равновесие» применительно к устойчивости стержней лучше вообще не произносить. Первое соображение – физическое. Будем исходить из противного – допустим, в задаче Эйлера безразличное равновесие достигнуто. Это означает, что в случае возмущения стойка перейдет в новое положение, которое не будет ни устойчивым, ни неустойчивым, то есть ничем не будет отличаться от прежнего. Причем новое положение будет определяться только точкой, направлением и интенсивностью возмущения. Может ли стойка при этом уменьшить кривизну, то есть испытать сжатие? Нет, потому что осевая жесткость стержней на несколько порядков превосходит изгибную. Вопрос о том, может ли стойка увеличить кривизну за счет растяжения (при сжимающей силе!) вообще поднимать не стоит. Значит, стойка изогнется без сжатия, сохраняя размер вдоль дуговой координаты, но увеличивая кривизну. Однако для этого точка приложения силы неизбежно должна сместиться в направлении действия силы (Рис. 1). При этом сила совершит работу, которая перейдет в потенциальную энергию изгиба. Значит, энергия увеличится, и новое положение не будет тождественно исходному. Следовательно, оно не было безразличным, что опровергает начальное предположение.

Второе соображение – математическое. Ни одно действительное число не может быть в точности равно другому действительному числу. Допустим, измеряя два стержня штангенциркулем, мы можем заключить, что их диаметры равны, скажем, 5 мм. Но если воспользоваться микрометром, то выяснится, что один стержень имеет диаметр 4.97 мм, а другой – 5.02 мм. То есть о равенстве двух действительных (вещественных) чисел можно говорить только в пределах заданной погрешности.

Безразличное равновесие – случай точного равенства силы, посчитанной по формуле Эйлера, и силы, приложенной к стойке. Первая из них включает иррациональное трансцендентное число $\pi^2$, которое (даже с точки зрения чистой математики, без учета точности измерений) вообще не может быть равно ничему, кроме себя самого. Вторая сила измеряется динамометром, имеющим некую инструментальную погрешность. Таким образом добиться точного равенства этих величин, то есть «поймать» безразличное равновесие, на практике невозможно.


[1] Несмеянов А. С., Садаков О. С., Сопротивление материалов. Нестандартные задачи и подходы к их решению, Челябинск, Издательство ЮУрГУ, 2005
[2] Никитин Н. Н., Добронравов В. В., Курс теоретической механики, М., Высшая школа, 1983
[3] Писаренко Г. С. (ред.), Сопротивление материалов, Киев, Вища школа, 1986
[4] Пановко Я. Г., Губанова И. И., Устойчивость и колебания упругих систем, М., Наука, 1987
[5] Алфутов Н. А., Основы расчета на устойчивость упругих систем, М., Машиностроение, 1978
[6] Работнов Ю. Н., Сопротивление материалов, М., ГИФМЛ, 1962