Дважды статически неопределимая неразрезная балка

Балку с промежуточными опорами принято называть неразрезной (или многоопорной, или многопролетной). Наиболее распространенным (хотя и далеко не единственным) реальным объектом, приводящим к этой расчетной схеме, является мост балочного типа.

Рассмотрим, например, Рис. 1, *а*. Точки A и D – берега, B и C – промежуточные опоры («быки»). Разная длина пролетов AB и BC может быть обусловлена большой глубиной реки под серединой пролета AC и, следовательно, техническими сложностями с установкой быка. Примеры подобных мостов показаны на Рис. 2.

Основная задача состоит в расчете на прочность. Необходимо построить эпюру изгибающего момента, проверить решение, найти опасное сечение и величину наибольшего момента.

Побочная задача заключается в сравнении разных основных систем метода сил для неразрезных балок и изучении вопроса об их удобстве. Кроме того, будет показано применение методов Коши-Крылова и моментных площадей для раскрытия статической неопределимости.

Расчетная схема показана на Рис. 1, *б*, причем распределенная нагрузка вызвана весом самого моста.

Вначале найдем степень статической неопределимости. В шарнирной опоре A возникают две реакции – вертикальная и горизонтальная, в остальных – только вертикальная, всего 2 + 1 + 1 + 1 = 5. Уравнений равновесия, как обычно для плоских задач, три – суммы сил на вертикаль и горизонталь, и сумма моментов. То есть задача 5 – 3 = 2 раза статически неопределима.

На Рис. 1, *в* показаны восемь из всех возможных основных систем. В ОС1...ОС6 отброшены два из четырех шарниров (при этом один из оставшихся во избежание кинематической изменяемости сделан неподвижным). В ОС7 врезаны два шарнира в промежуточных точках пролетов. То, что координаты этих врезанных шарниров могут быть произвольными, лишний раз подчеркивает бесконечность количества основных систем для любой задачи. Наконец, в ОС8 шарниры врезаны над промежуточными опорами.

Все эти расчетные схемы, очевидно, являются статически определимыми и кинематически неизменными, то есть корректными основными системами для данной задачи. ОС с номерами от 1 до 6, по большому счету, равноценны. Мы рассмотрим ОС1, привлекающую симметрией и, следовательно, трудоемкостью уж точно не большей (хотя, возможно, и не меньшей), чем другие из того же ряда.

Эквивалентная система состоит из Рис. 1, *г* и системы канонических уравнений метода сил

$$\begin{cases} \delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \delta_{1F} = 0 \\ \delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \delta_{2F} = 0 \end{cases} \qquad (1)$$

Изгибная жесткость EI_x, считающаяся известной и постоянной по длине балки, входит во все слагаемые системы (1) и, следовательно, сокращается. Поэтому в выражениях для обобщенных перемещений эта жесткость для краткости опущена.

Напомним, что направления неизвестных силовых факторов X_1 и X_2, вообще говоря, произвольны, однако в данном случае достаточно очевидны – вряд ли быки будут тянуть мост вниз.

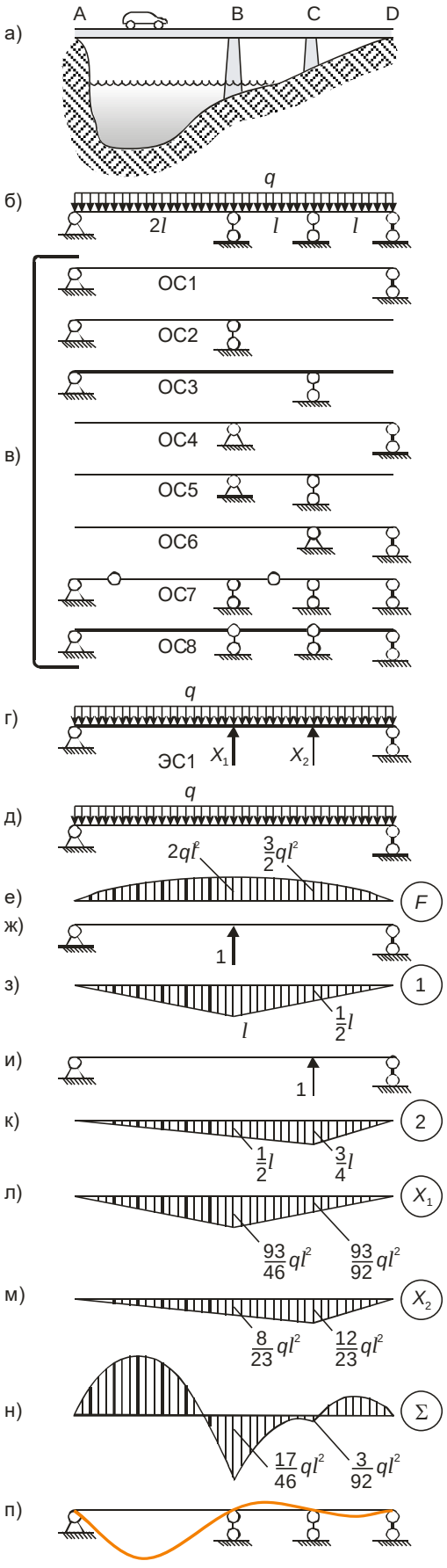


Рис. 1



Рис. 2

$$\delta_{11}=2\left(\frac{1}{2}\cdot 2l\cdot l\cdot\frac{2}{3}\cdot l\right)=\frac{4}{3}l^3 \tag{2}$$

$$\delta_{12}=\frac{1}{2}\cdot 2l\cdot l\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}l+\frac{l}{2}\left[l\left(2\cdot\frac{1}{2}l+\frac{3}{4}l\right)+\frac{1}{2}l\left(2\cdot\frac{3}{4}l+\frac{1}{2}l\right)\right]+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}l\cdot l\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4}l=l^3\left[\frac{1}{3}+\frac{11}{24}+\frac{1}{8}\right]=\frac{11}{12}l^3 \tag{3}$$

$$\delta_{22}=\frac{1}{2}\cdot 3l\cdot\frac{3}{4}l\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4}l+\frac{1}{2}\cdot l\cdot\frac{3}{4}l\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4}l=\frac{3}{4}l^3 \tag{4}$$

$$\delta_{1F}=-2\left(\frac{1}{2}\cdot 2l\cdot 2ql^2\cdot\frac{2}{3}\cdot l+\frac{1}{12}q(2l)^3\cdot\frac{1}{2}\cdot l\right)=-2ql^4\left(\frac{4}{3}+\frac{1}{3}\right)=-\frac{10}{3}ql^4$$

$$\delta_{2F}=-\left(\frac{1}{2}\cdot 3l\cdot\frac{3}{2}ql^2\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4}l+\frac{1}{12}q(3l)^3\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}l+\frac{1}{2}\cdot l\cdot\frac{3}{2}ql^2\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4}l+\frac{1}{12}ql^3\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}l\right)=$$

$$=-ql^4\left(\frac{9}{8}+\frac{27}{32}+\frac{3}{8}+\frac{1}{32}\right)=-\frac{36+27+12+1}{32}ql^4=-\frac{19}{8}ql^4$$

Таким образом, уравнения (1) в развернутой форме примут вид:

$$\begin{cases}\frac{4}{3}l^3\cdot X_1+\frac{11}{12}l^3\cdot X_2=\frac{10}{3}ql^4\\ \frac{11}{12}l^3\cdot X_1+\frac{3}{4}l^3\cdot X_2=\frac{19}{8}ql^4\end{cases}$$

Решение системы таково:

$$X_1=\frac{93}{46}ql;\qquad X_2=\frac{16}{23}ql$$

Обе силы получились положительными, чего и следовало ожидать. Умножая единичные эпюры Рис. 1, *з, к* на соответствующие силовые факторы, получаем эпюры Рис. 1, *л, м*. Затем складываем их с эпюрой внешних сил Рис. 1, *е* и получаем суммарную эпюру Рис. 1, *н*. При этом приходится вычислять моменты над опорами B и C соответственно:

$$M_B=ql^2\left(2-\frac{93}{46}-\frac{8}{23}\right)=-\frac{17}{46}ql^2$$

$$M_C=ql^2\left(\frac{3}{2}-\frac{93}{92}-\frac{12}{23}\right)=-\frac{3}{92}ql^2 \tag{5}$$

На Рис. 1, *п* красным показана изогнутая ось балки (принцип начальных размеров умышленно нарушен в целях наглядности). Как ни покажется парадоксальным, но на участке BC упругая кривая действительно выгнута вверх. Это следует не только из суммарной эпюры, но и из полного расчета на жесткость, который в данное исследование не включен.

Рассмотрим теперь ОС8. Эквивалентная система показана на Рис. 3, *а*. Канонические уравнения метода сил имеют, разумеется, тот же вид (1).

Для выбора направлений моментов X_1 и X_2 можно руководствоваться суммарной эпюрой Рис. 1, *н* – над обеими опорами сжатые слои снизу.

Вообще говоря, если для единожды статически неопределимых задач знак неизвестной очевиден в большинстве случаев, то для второй степени статической неопределимости эти знаки можно надежно предугадать крайне редко. Здесь мы имеем как раз такой простой случай.

$$\delta_{11}=\frac{1}{2}\cdot 2l\cdot 1\cdot\frac{2}{3}\cdot 1+\frac{1}{2}\cdot l\cdot 1\cdot\frac{2}{3}\cdot 1=\frac{2}{3}l+\frac{1}{3}l=l \qquad (6)$$

$$\delta_{12}=\frac{1}{2}\cdot l\cdot 1\cdot\frac{1}{3}\cdot 1=\frac{1}{6}l \qquad (7)$$

$$\delta_{22}=2\left(\frac{1}{2}\cdot l\cdot 1\cdot\frac{2}{3}\cdot 1\right)=2\cdot\frac{1}{3}\cdot 1=\frac{2}{3}l \qquad (8)$$

$$\delta_{1F}=-\left(\frac{1}{12}q(2l)^3\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{12}ql^3\cdot\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{12}\cdot\frac{1}{2}ql^3(8+1)=-\frac{3}{8}ql^3$$

$$\delta_{2F}=-2\left(\frac{1}{12}ql^3\cdot\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{12}ql^3$$

Подставляя обобщенные перемещения в систему (1), имеем:

$$\begin{cases} l\cdot X_1+\frac{1}{6}l\cdot X_2=\frac{3}{8}ql^3 \\ \frac{1}{6}l\cdot X_1+\frac{2}{3}l\cdot X_2=\frac{1}{12}ql^3 \end{cases}$$

Решение системы дает:

$$X_1=\frac{17}{46}ql^2;\qquad X_2=\frac{3}{92}ql^2 \qquad (9)$$

Результаты (моменты над опорами) соответствуют полученным ранее (5). Проверка сошлась.

Выясним, какая из рассмотренных основных систем наиболее удобна и проста.

Начнем с эпюр внешних сил Рис. 1, *е* для ОС1 и Рис. 3, *в* для ОС8. Нетрудно видеть, что вторая из них состоит из трех обособленных частей – в качестве их разделителей выступают врезанные шарниры, в которых момент, разумеется, равен нулю. Умножать такую эпюру на любую другую гораздо проще, чем «сплошную». Косвенное доказательство состоит в том, что для эпюры Рис. 3, *в* нам не потребовалось вычислять ни одной ординаты, а для эпюры Рис. 1, *е* – целых две. Таким образом, счет 1:0 в пользу основной системы с шарнирами, врезанными над опорами.

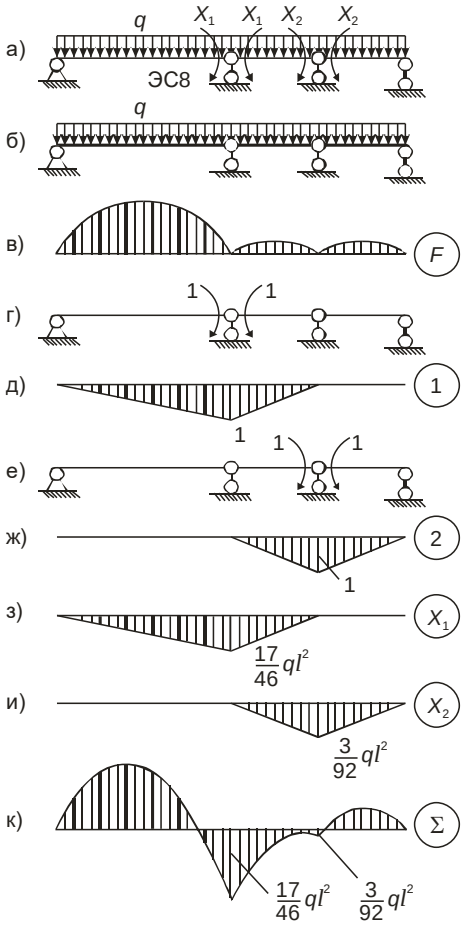


Рис. 3

Единичные эпюры для ОС1 (Рис. 1, *з*, *к*) простираются на всю балку, а для ОС8 (Рис. 3, *д*, *ж*) – на два участка. Иными словами, каждая из эпюр во втором случае имеет нулевой участок, что не требует перемножения эпюр на нем. Счет 3:0.

Далее, при вычислении обобщенного перемещения δ_{12} для ОС1 пришлось перемножать не только треугольник на треугольник (дважды), но и трапецию на трапецию, в то время как для любых основных систем с врезанными шарнирами такое перемножение всегда выполняется только над двумя треугольниками, что несравненно проще. Счет 4:0.

В Табл. 1 приведены коэффициенты при обобщенных перемещениях и при неизвестных для обеих основных систем, без учета знаков и размерностей. Чем «проще», «короче» и «компактнее» коэффициент, тем меньше вероятность ошибиться при расчетах, тем быстрее получается результат – тем удобнее основная система. По строчкам δ_{22} и X_1 в Табл. 1 – равенство, ничья. По всем остальным пяти позициям выигрывает ОС8. Текущий счет 9:0 в ее пользу.

Табл. 1

	ОС1	ОС8
δ_{11}	$\frac{4}{3}$	1
δ_{12}	$\frac{11}{12}$	$\frac{1}{6}$
δ_{22}	$\frac{3}{4}$	$\frac{2}{3}$
δ_{1F}	$\frac{10}{3}$	$\frac{3}{8}$
δ_{2F}	$\frac{19}{8}$	$\frac{1}{12}$
X_1	$\frac{93}{46}$	$\frac{17}{46}$
X_2	$\frac{16}{23}$	$\frac{3}{92}$

Далее, для вычисления моментов над опорами в первом случае нам приходится отдельно складывать три числа (5), во втором случае ничего складывать не надо – моменты над опорами уже получены (9). Счет 11:0.

Наконец, для сложения эпюр от найденных неизвестных реакций с эпюрой внешних сил для ОС1 вновь потребовалось вычисление промежуточных ординат (Рис. 1, *л*, *м*). У второй из этих эпюр даже для максимальной ординаты нужно дополнительное перемножение, пусть и очень простое. Для ОС8 эпюры от X_1 и X_2 (Рис. 3, *з*, *и*) в промежуточных ординатах не нуждаются, а максимумы сохраняют модули найденных неизвестных, потому что на единичных эпюрах этот максимум всегда равен единице.

Окончательный результат 13:0. И это при учете упрощающей симметрии двух из трех эпюр ОС1 (Рис. 1, *е*, *з*)...

Таким образом, с разгромным «сухим» счетом победила основная система с шарнирами, врезанными над опорами. Аналогичный вывод будет сделан при ее сравнении с другой основной системой, как показанной на Рис. 1, *в*, так и вообще любой. Что же касается ОС7, то она

видится наименее удачной из всех рассмотренных основных систем. Предоставляем читателю возможность самостоятельно в этом убедиться.

Показанное преимущество ОС с врезанными шарнирами – не фокус, не специально подобранный пример, не частный случай, а инженерная практика, история которой исчисляется уже не десятилетиями, а веками (первая неразрезная балка с шарнирами, врезанными над опорами, была рассмотрена Б. П. Э. Клапейроном в 1848 г.). Даже когда метод сил еще не завоевал нынешней популярности, во все учебники входила глава о расчете неразрезных балок, где настоятельно рекомендовалось решать подобную задачу, превращая неразрезную балку в разрезную. При этом использовались различные графоаналитические методы, например, так называемый «метод трех моментов» [1]-[5]. Метода сил лишь обобщил, формализовал и упростил эти приемы расчета, не поменяв их смысл [6].

Осталось выполнить расчет на прочность, то есть найти максимальные моменты во всех пролетах и сравнить их с наибольшим из моментов над опорами (9). Опять же, решим задачу с помощью ОС1 и проверим решение на ОС8.

Реакции крайних опор от действия внешних сил легко определяются по эпюре Рис. 1, *е* – в силу симметрии

$$R_A^F = R_D^F = \frac{1}{2}\left(q \cdot 4l\right) = 2ql \tag{10}$$

Положительным направлением сил здесь и далее считается направление вверх. Реакции тех же опор для расчетных схем Рис. 1, *з*, *к* равны

$$r_A^1 = r_D^1 = -\frac{1}{2}; \qquad r_A^2 = -\frac{1}{4}; \qquad r_D^2 = -\frac{3}{4}$$

Строчные буквы *r* говорят о том, что эти реакции – от единичных сил. Для получения истинных силовых реакций опор умножаем результаты на X_1 и X_2, соответственно:

$$\begin{aligned} &R_A^1 = R_D^1 = r_A^1 \cdot X_1 = -\frac{1}{2} \cdot \frac{93}{46} ql = -\frac{93}{92} ql; \\ &R_A^2 = -\frac{1}{4} \cdot X_2 = -\frac{1}{4} \cdot \frac{16}{23} ql = -\frac{4}{23} ql; \qquad R_D^2 = -\frac{3}{4} \cdot X_2 = -\frac{3}{4} \cdot \frac{16}{23} ql = -\frac{12}{23} ql \end{aligned} \tag{11}$$

Суммарные реакции крайних опор, согласно формулам (10) и (11):

$$R_A = R_A^F + R_A^1 + R_A^2 = \left(2 - \frac{93}{92} - \frac{4}{23}\right) ql = \frac{75}{92} ql$$

$$R_D = R_D^F + R_D^1 + R_D^2 = \left(2 - \frac{93}{92} - \frac{12}{23}\right) ql = \frac{43}{92} ql$$

Реакции промежуточных опор известны – это X_1 и X_2, соответственно. Изображаем расчетную схему, где связи заменены реакциями (Рис. 4, *а*). На всякий случай убедимся в соблюдении уравнения равновесия:

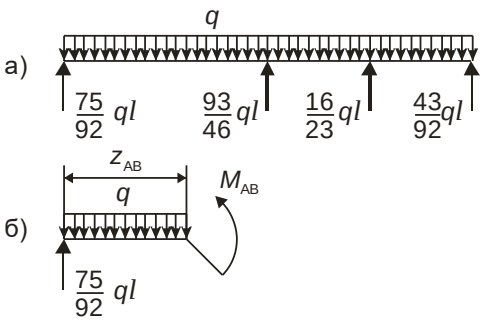


Рис. 4

$$\sum F_y = \frac{75}{92} ql + \frac{93}{46} ql + \frac{16}{23} ql + \frac{43}{92} ql - q \cdot 4l = 0$$

Проверка сошлась.

Экстремальные значения момента достигаются там, где производная момента (то есть поперечная сила) обращается в нуль. Найдем такую точку на участке АВ (Рис. 4, *б*). Для двух неизвестных (z_{AB} и M_{AB}) можно составить два уравнения равновесия:

$$\sum F_y = \frac{75}{92} ql - q \cdot z_{AB} = 0 \rightarrow z_{AB} = \frac{75}{92} l$$

$$\sum M_A = \frac{1}{2} q \left(z_{AB}\right)^2 - M_{AB} = 0 \rightarrow M_{AB} = \frac{1}{2} q \left(\frac{75}{92} l\right)^2 \approx 0.332 ql^2$$

Модуль момента над опорой В согласно формуле (9) равен $\left|M_B\right| = \frac{17}{46} ql^2 \approx 0.37 ql^2$, то есть больше, чем M_{AB}. Вычисление остальных экстремальных моментов производится аналогично. Можно показать, что они не превосходят $|M_B|$.

Проведем проверку, используя ОС8. Возьмем расчетную схему Рис. 3, *б*, разобьем ее на три независимых балки, найдем реакции, а затем «соберем» расчетную схему обратно (Рис. 5). Для расчетных схем единичных моментов (Рис. 3, *г*, *е*) также найдем реакции опор – Рис. 6. Теперь, вновь используя принцип суперпозиции, вычислим истинные реакции:

$$R_A = ql - \frac{1}{2l}\cdot X_1 = ql - \frac{1}{2l}\cdot\frac{17}{46}ql = \frac{75}{92}ql$$

$$R_B = \frac{3}{2}ql + \frac{3}{2l}\cdot X_1 - \frac{1}{l}\cdot X_2 = \frac{3}{2}ql + \frac{3}{2l}\cdot\frac{17}{46}ql - \frac{1}{l}\cdot\frac{3}{92}ql = \frac{93}{46}ql$$

$$R_C = ql - \frac{1}{l}\cdot X_1 + \frac{2}{l}\cdot X_2 = ql - \frac{1}{l}\cdot\frac{17}{46}ql + \frac{2}{l}\cdot\frac{3}{92}ql = \frac{16}{23}ql$$

$$R_D = \frac{1}{2}ql - \frac{1}{l}\cdot X_2 = \frac{1}{2}ql - \frac{1}{l}\cdot\frac{3}{92}ql = \frac{43}{23}ql$$

Полученные результаты полностью соответствуют Рис. 4, *а*. Проверка сошлась.

Здесь преимущество ОС8 перед ОС1 уже не столь очевидно. С одной стороны, определение реакций от действия внешних сил и найденных силовых факторов для ОС8 несколько проще, чем для ОС1. С другой стороны, во втором случае приходится отдельно находить силовые реакции средних опор, в то время как в первом случае они являются решениями уравнений (1) – итого две формулы (ОС1) против четырех (ОС8). Но, тем не менее, говорить о том, что ОС1 оказалась проще, чем ОС8, вряд ли уместно. Для расчета на прочность они, по большому счету, обладают одинаковой трудоемкостью.

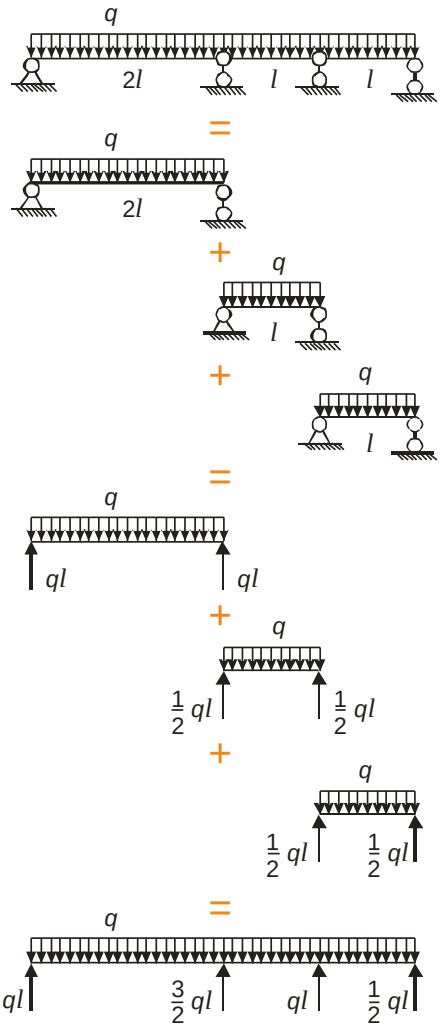


Рис. 5

Таким образом, при решении задач с неразрезной балкой рекомендуется поступать следующим образом: раскрывать статическую неопределимость при помощи основной системы с шарнирами, врезанными над опорами, после чего проводить проверку. Однако проверка второй ОС является неразумной, поскольку решение будет заведомо сложнее, чем по первой ОС. Проверка «перемножением эпюр», на первый взгляд, представляется единственным вариантом. Однако известно, что она страдает низкой надежностью.

В качестве альтернативы для задач степени статической неопределимости два и более предлагается весьма надежная проверка, называемая универсальной проверкой всех единичных перемещений [7]:

$$\delta_{ss} = \sum_{i=1}^{n}\delta_{ii} + 2\sum_{\substack{i=1\\ j=1\\ i\neq j}}^{n}\delta_{ij} \qquad (12)$$

где δ_{ss} – условное перемещение по направлениям всех единичных сил, равное произведению самой на себя эпюры, полученной приложением к основной системе всех единичных сил.

Очевидно, что для единожды статически неопределимой конструкции второе слагаемое в формуле (12) обращается в нуль, а равенство – в тождество.

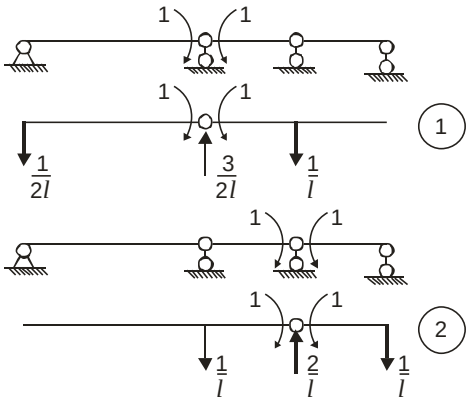


Рис. 6

Продемонстрируем проверку на примере ОС1. Имеем расчетную схему Рис. 7, *а* и эпюру Рис. 7, *б*.

$$\delta_{ss} = \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}l\cdot 2l\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{2}l + \frac{l}{6}\left[\frac{3}{2}l\left(2\cdot\frac{3}{2}l + \frac{5}{4}l\right) + \frac{5}{4}l\left(2\cdot\frac{5}{4}l + \frac{3}{2}l\right) + \frac{1}{2}\cdot\frac{5}{4}l\cdot l\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{5}{4}l\right] =$$

$$= l^3\left[\frac{3}{2} + \frac{1}{6}\left(\frac{51}{8} + 5\right) + \frac{25}{48}\right] = \frac{72+91+25}{48}l^3 = \frac{188}{48}l^3 = \frac{47}{12}l^3$$

Подставляя обобщенные перемещения (2)...(4) в формулу (12), получаем:

$$\delta_{ss} = \delta_{11} + \delta_{22} + 2\cdot\delta_{12} = l^3\cdot\left(\frac{4}{3} + \frac{3}{4} + 2\frac{11}{12}\right) = \frac{16+9+22}{12}l^3 = \frac{47}{12}l^3$$

Проверка сошлась. Теперь проделаем тот же прием с ОС8. Расчетная схема Рис. 7, *в*, эпюра Рис. 7, *г*.

$$\delta_{ss} = \frac{1}{2}\cdot 1\cdot 2l\cdot\frac{2}{3}\cdot 1 + l + \frac{1}{2}\cdot l\cdot 1\cdot\frac{2}{3}\cdot 1 = l\left(\frac{2}{3}+1+\frac{1}{3}\right) = 2l$$

Подстановка обобщенных перемещений (6)...(8) в формулу (12) дает:

$$\delta_{ss} = \delta_{11} + \delta_{22} + 2\cdot\delta_{12} = l\left(1+\frac{2}{3}+2\frac{1}{6}\right) = 2l$$

Проверка сошлась. Излишне обращать внимание на то, что универсальная проверка для ОС8 получилась существенно менее трудоемкой, чем для ОС1.

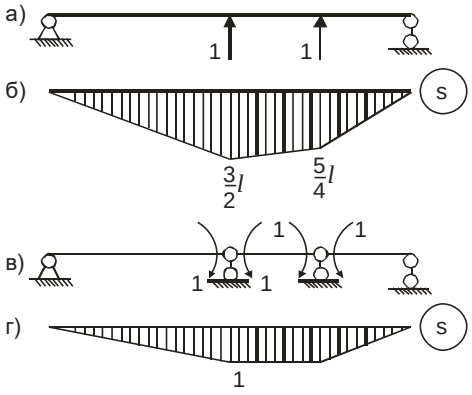


Рис. 7

Для еще одной проверки ту же задачу можно решить методом Коши-Крылова (методом начальных параметров). Отбросим связи, заменяя их реакциями (Рис. 8), и составим два уравнения равновесия:

$$\Sigma F_y = R_1 + R_2 + R_3 + R_4 - 4ql = 0 \qquad (13)$$

$$\Sigma M_D = R_1\cdot 4l + R_2\cdot 2l + R_3\cdot l - 8ql^2 = 0$$

Сокращая последнее уравнение на l, получаем

$$4R_1 + 2R_2 + R_3 - 8ql = 0 \qquad (14)$$

Теперь запишем функцию моментов и дважды ее проинтегрируем:

$$M_x(z) = R_1 z - \frac{1}{2}qz^2 + H(z-2l)R_2(z-2l) + H(z-3l)R_3(z-3l)$$

$$EI_x\theta(z) = R_1\frac{z^2}{2} - \frac{1}{6}qz^3 + H(z-2l)R_2\frac{(z-2l)^2}{2} + H(z-3l)R_3\frac{(z-3l)^2}{2} + C_1$$

$$EI_x v(z) = R_1\frac{z^3}{6} - \frac{1}{24}qz^4 + H(z-2l)R_2\frac{(z-2l)^3}{6} + H(z-3l)R_3\frac{(z-3l)^3}{6} + C_1 z + C_2$$

Граничных условий четыре: на всех опорах прогибы равны нулю. Таким образом, имеем систему линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) шестого порядка: (13), (14) и четыре граничных условия, с шестью неизвестными: R_1, R_2, R_3, R_4, C_1, C_2. Решая СЛАУ, находим, во-первых, реакции (Рис. 4, *а*), а во-вторых, константы интегрирования: $C_1 = -\frac{29}{138}ql^3$, $C_2 = 0$.

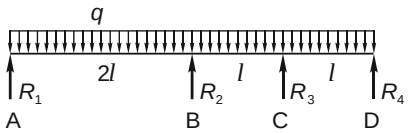


Рис. 8

Последние могут оказаться полезными для полного расчета на жесткость, в частности, для построения упругой оси.

Вообще, метод Коши-Крылова для n раз статически неопределимой конструкции требует решения СЛАУ порядка $(n + 4)$, а метод сил – СЛАУ порядка n. Таким образом, применение метода сил предпочтительней. Однако именно для неразрезных балок, где любые ОС, кроме таковой с шарнирами, врезанными над опорами, весьма трудоемки, проверка методом Коши-Крылова решения той самой оптимальной ОС может оказаться даже проще, чем любой иной ОС.

Наконец, рассмотрим применение метода моментных площадей, разработанного А. Сен-Венаном. Теоретические основы метода можно изучить по источникам [3, 8]. Здесь стоит лишь кратко, без вывода, привести так называемую вторую теорему о моментных площадях:

Расстояние от сечения B до касательной к упругой оси в сечении A численно равно статическому моменту относительно точки B площади эпюры изгибающих моментов на участке AB.

Как и методы сил и перемещений, метод моментных площадей требует предварительного выбора основной системы. Возьмем рассмотренную ОС1 (Рис. 1, *в*), а вместо эквивалентной системы Рис. 1, *г*, получаем Рис. 9, *а*. В сущности, для реакций промежуточных шарниров можно было оставить обозначения X_1 и X_2, поскольку метод моментных площадей не требует каких-либо специальных обозначений.

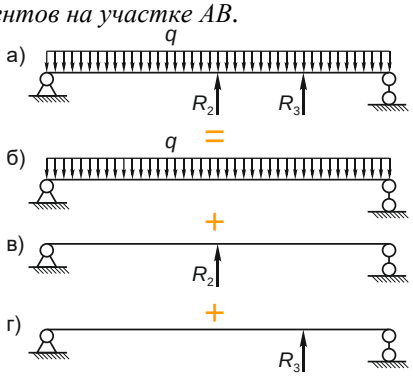


Рис. 9

Теперь разложим по суперпозиции эквивалентную систему на сумму состояний «F» (Рис. 9, *б*), «1» (Рис. 9, *в*) и «2» (Рис. 9, *г*), и рассмотрим их последовательно.

Начнем с исходного состояния (Рис. 9, *а*). Возьмем произвольно сечение A (левую опору) и проведем в нем касательную AD' (Рис. 10) к упругой оси (показана красным). Введем обозначение t^G_{HJ} – расстояние от сечения J до касательной к упругой оси, построенной в сечении H, причем верхний индекс G будет обозначать состояние. Отсутствие индекса соответствует исходному состоянию.

Учитывая, что в последнем прогибы в сечениях A, B, C и D равны нулю, и исходя из подобия треугольников ABB', ACC' и ADD', можно записать

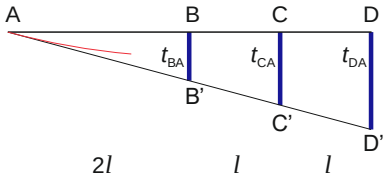


Рис. 10

$$t_{DA} = 2t_{BA} \qquad (15)$$

$$t_{CA} = \frac{3}{2}t_{BA} \qquad (16)$$

Теперь рассмотрим состояние «F». Найдем реакции (Рис. 11, *а*) и выберем произвольное сечение X с координатой *x*, после чего слева от выбранного сечения построим эпюры отдельно от реакции в сечении A (желтым цветом) и от внешних сил (оранжевым) – Рис. 11, *б*. Площади под эпюрами равны соответственно $\frac{1}{2}\cdot x\cdot 2qlx = qlx^2$ и $-\frac{1}{3}\cdot x\cdot\frac{1}{2}qx^2 = -\frac{1}{6}qx^3$. Площадь фигуры, лежащей под осью балки, традиционно считается отрицательной. Центры тяжести обычного и параболического треугольников отмечены синей и зеленой точками соответственно.

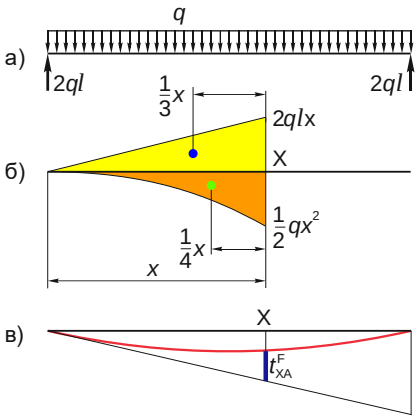


Рис. 11

Тогда, согласно второй теореме, можно записать выражение для величины t^F_{XA} (Рис. 11, *в*). Жесткость EI_x здесь и далее опущена:

$$t^F_{XA} = qlx^2\cdot\frac{1}{3}x - \frac{1}{6}qx^3\cdot\frac{1}{4}x = \frac{1}{24}qx^3(8-x) \qquad (17)$$

Подставляя в формулу (17) значения *x*, равные 2*l*, 3*l* и 4*l* для сечений B, C и D соответственно, получаем:

$$t^F_{BA} = 2ql^4 \qquad (18)$$

$$t^F_{CA} = \frac{45}{8}ql^4 \qquad (19)$$

$$t^F_{DA} = \frac{32}{3}ql^4 \qquad (20)$$

Перейдем к состоянию «1». Расчетная схема Рис. 12, *а*, реакции Рис. 12, *б*, статические моменты Рис. 12, *в*:

$$t^1_{BA} = -\frac{1}{2}\cdot 2l\cdot R_2 l\cdot\frac{2}{3}l = -\frac{2}{3}R_2 l^3 \quad \text{(голубая заливка)} \qquad (21)$$

$$t^1_{CA} = \frac{1}{2}\cdot R_2 l\cdot l\cdot\frac{1}{3}\cdot l - \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}R_2 l\cdot l\cdot 3l = \frac{1}{2}R_2 l^3\left(\frac{1}{3}-\frac{9}{2}\right) = -\frac{25}{12}R_2 l^3 \quad \text{(зеленая заливка и красная штриховка)} \qquad (22)$$

$$t^1_{DA} = \frac{1}{2}\cdot 2R_2 l\cdot 2l\cdot\frac{1}{3}\cdot 2l - \frac{1}{2}\cdot 2R_2 l\cdot 4l\cdot\frac{1}{3}\cdot 4l = R_2 l^3\left(\frac{4}{3}-\frac{16}{3}\right) = -4R_2 l^3 \quad \text{(фиолетовая и желтая штриховки)} \qquad (23)$$

Аналогично для состояния «2»: расчетная схема Рис. 13, *а*, реакции Рис. 13, *б*, статические моменты Рис. 13, *в*:

$$t^2_{BA} = -\frac{1}{2}\cdot 2l\cdot\frac{1}{2}R_3 l\cdot\frac{1}{3}\cdot 2l = -\frac{1}{3}R_3 l^3 \quad \text{(голубая заливка)} \qquad (24)$$

$$t^1_{CA} = -\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}R_3 l\cdot 3l\cdot\frac{1}{3}\cdot 3l = -\frac{9}{8}R_3 l^3 \quad \text{(красная штриховка)} \qquad (25)$$

$$t^2_{DA} = \frac{1}{2}\cdot R_3 l\cdot l\cdot\frac{1}{3}\cdot l - \frac{1}{2}\cdot R_3 l\cdot 4l\cdot\frac{1}{3}\cdot 4l = R_3 l^3\frac{1}{6}(1-16) = -\frac{5}{2}R_3 l^3 \quad \text{(зеленая заливка и желтая штриховка)} \qquad (26)$$

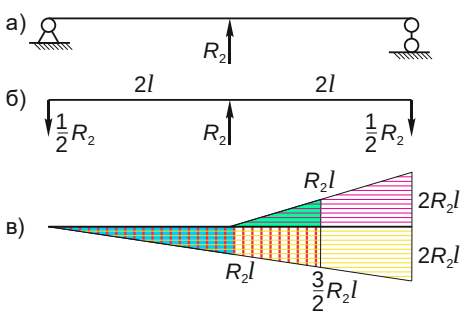


Рис. 12

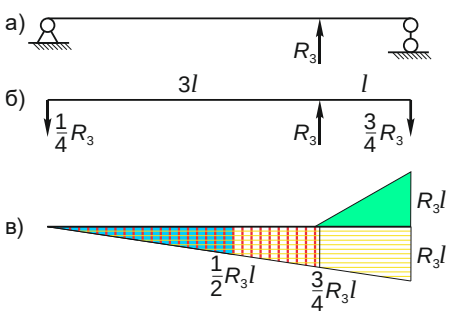


Рис. 13

Теперь по суперпозиции из формул (18), (21) и (24) получаем:

$$t_{BA} = t_{BA}^F + t_{BA}^1 + t_{BA}^2 = 2ql^4 - \frac{2}{3}R_2 l^3 - \frac{1}{3}R_3 l^3 \quad (27)$$

Аналогично, из формул (19), (22) и (25):

$$t_{CA} = t_{CA}^F + t_{CA}^1 + t_{CA}^2 = \frac{45}{8}ql^4 - \frac{25}{12}R_2 l^3 - \frac{9}{8}R_3 l^3 \quad (28)$$

и, наконец, из формул (20), (23) и (26) следует

$$t_{DA} = t_{DA}^F + t_{DA}^1 + t_{DA}^2 = \frac{32}{3}ql^4 - 4R_2 l^3 - \frac{5}{2}R_3 l^3 \quad (29)$$

Получена СЛАУ пятого порядка: уравнения (15), (16) и (27)-(29) с пятью неизвестными: R_2, R_3, t_{BA}, t_{CA} и t_{DA}, но ее легко свести к СЛАУ второго порядка. Например, из уравнений (15), (27) и (29) получаем:

$$\frac{32}{3}ql^4 - 4R_2 l^3 - \frac{5}{2}R_3 l^3 = 2\left(2ql^4 - \frac{2}{3}R_2 l^3 - \frac{1}{3}R_3 l^3\right)$$

откуда после преобразований следует

$$16R_2 + 11R_3 = 40ql \quad (30)$$

Аналогично, из формул (16), (28) и (29) находим

$$\frac{45}{8}ql^4 - \frac{25}{12}R_2 l^3 - \frac{9}{8}R_3 l^3 = \frac{3}{2}\left(2ql^4 - \frac{2}{3}R_2 l^3 - \frac{1}{3}R_3 l^3\right)$$

что приводит к уравнению

$$26R_2 + 15R_3 = 63ql \quad (31)$$

И, окончательно, решая СЛАУ четвертого порядка (13), (14), (30) и (31) с четырьмя неизвестными реакциями опор, приходим к тому же результату – Рис. 4, *а*. Еще одна проверка сошлась.

Конечно, метод моментных площадей по трудоемкости существенно превосходит метод сил с ОС8 и даже может сравниться с ОС1, однако следует напомнить, что чем сложнее путь проверки и чем он по физическому смыслу дальше от основного решения, тем проверка надежнее.

Результаты:

Суммарная эпюра Рис. 1, *н*. Максимальный момент $\frac{17}{46}ql^2$. Опасное сечение – В.

Литература

1. Писаренко Г. С. (ред.), Сопротивление материалов, Киев, Вища школа, 1986
2. Гастев В. А., Краткий курс сопротивления материалов, М., Наука, 1977
3. Тимошенко С. П., Гере Дж., Механика материалов, М., Мир, 1976
4. Беляев Н. М., Сопротивление материалов, М., ГИТТЛ, 1956
5. Филоненко-Бородич М. М. (ред.), Курс сопротивления материалов, М., ГИТТЛ, 1955
6. Феодосьев В. И., Сопротивление материалов, М., МГТУ им. Баумана, 1999
7. Подскребко М. Д., Сопротивление материалов, Минск, Вышэйшая школа, 2007
8. Beer F. P., Johnston E. R., DeWolf J. T., Mazurek D. F., Mechanics of Materials, 6th ed., McGrowHill, New York, 2012